III-1305

Constantin Păpuşoi **Alexandru Stancu**

Tratat de electricitate şi magnetism (I)

135186
B.C.U. - IASI

Cartea Universitară
Bucureşti
2005

Editura Cartea Universitară
Str. Av. Traian Vasile, nr.8, sector 1, Bucureşti
e-mail: office@carteauniversitara.ro,
www.carteauniversitara.ro

Editură acreditată de *Ministerul Educaţiei şi Cercetării* prin *Consiliul Naţional al Cercetării Ştiinţifice din Învăţământul Superior.*

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
PĂPUŞOI, CONSTANTIN
Tratat de electricitate şi magnetism / Constantin Păpuşoi, Alexandru Stancu. - Bucureşti : Cartea Universitară, 2006
Bibliogr.
ISBN (10) 973-731-304-6 ; ISBN (13) 978-973-731-304-1

I. Stancu, Alexandru

537.6(075.8)

ISBN: 973-731-304-6

]
intr-u
am p
denţi
dar ş
fenor
moda
ce lu
oferi
în do
electr
modu
tehni
des în
radio
să co
fenon
rică,
să fac
şi în
trebu
S
ţiale
dintre
inţific
gravă
fesori
fost ir
ale ur
înceti
dome
deosel
să spu

Prefaţă

Lucrarea de faţă este primul volum al unei serii dedicate introducerii intr-unul dintre domeniile fundamentale ale fizicii, electromagnetismul. Neam propus de la bun început să scriem o lucrare care să fie utilă atât studenţilor de la facultatea de fizică sau de la diverse specializări de inginerie dar şi tuturor celor care doresc să se iniţieze şi apoi să aprofundeze studiul fenomenelor electrice şi magnetice. Credem că prin conţinut, dar şi prin modalitatea modernă de prezentare, tratatul se va dovedi folositor şi celor ce lucrează în cercetarea ştiinţifică. Un obiectiv important este acela de a oferi o imagine cât mai clară a situaţiei existente în cercetarea ştiinţifică în domeniul materialelor magnetice şi dielectrice şi a aplicaţiilor actuale ale electromagnetismului. Acest domeniu al fizicii a schimbat în mod esenţial modul de viaţă al oamenilor şi este şi astăzi un motor esenţial al evoluţiei tehnico-ştiinţifice. Este suficient să amintim câteva dintre aplicaţiile cele mai des întâlnite în viaţa curentă (motorul electric, generatorul electric, telefonul, radioul, calculatorul electronic, iluminatul electric) şi cred că este suficient să conştientizăm importanţa domeniului pentru om. Faptul că multe dintre fenomenele naturale sunt de natură electromagnetică (electricitatea atmosferică, magnetismul terestru) arată că multe dintre aceste cunoştinţe ar trebui să facă parte din cultura oricărei persoane. A înţelege lumea în care trăim şi în care venim în contact cu tot mai multe produse ale tehnicii moderne ar trebui să fie un scop al oricărui om modern.

Suntem acum în primele etape de implementare a unei reforme substanţiale a învăţământului românesc. Este regretabil să remarcăm faptul că una dintre "victimele colaterale" ale acestei reforme pare să fie învăţământul ştiinţific. Dacă în şcoli se aude tot mai rar şi tot mai slab glasul ştiinţei este o gravă eroare care va afecta generaţii de elevi şi studenţi. În calitate de profesori încercăm să arătăm că munca noastră şi a generaţiilor anterioare nu a fost inutilă şi că, chiar dacă la un moment dat nu se văd aplicaţiile posibile ale unui avans fundamental în ştiinţă, asta nu înseamnă că acesta trebuie încetinit sau oprit. Prin această lucrare ne propunem să facem atractiv acest domeniu al fizicii noilor generaţii de studenţi pentru a nu rupe firul tradiţiei deosebite pe care o avem în acest domeniu de studiu modern al fizicii. Trebuie să spunem că la Iaşi există o veche tradiţie în studiul electromagnetismului.

9
9
10
13
13
15
16
17
18
28
30
31
33
35
39
48
49
53
55
61
63
67
70

Amintim aici pe cel care a înfiinţat Laboratorul de Electricitate, în 1897, Dragomir Hurmuzescu şi pe cel care a continuat cu deosebit succes aceste studii, acad. Ştefan Procopiu. Şcoala de electromagnetism creată de profesorul Procopiu continua să se dezvolte, fiind una dintre cele mai performante din cercetarea ştiinţifică românească.

Am început acest dificil proiect împreună cu eminentul profesor Constantin Păpuşoi, care i-a dedicat un considerabil efort până în ultimele zile de viaţă. Plecarea sa prematură dintre noi îmi lasă o grea sarcină de a finaliza ceea ce am realizat până acum. Sper să duc la bun sfârşit acest proiect în anii ce vin.

Mulţumesc tuturor celor care ne-au sprijinit pe parcursul elaborării acestei lucrări, în special domnului doctorand Florin Ciubotaru care a adus o contribiţie semnificativă la realizarea figurilor.

Iaşi, ianuarie 2006

prof.dr. Alexandru STANCU

Cuprins

1 Interacţiuni electrostatice în vid **9**

1.1 Câmpul electrostatic. Legea lui Coulomb. 9

1.2 Unităţi de măsură şi dimensiuni 10

1.3 Câmpul electrostatic. 13

1.3.1 Vectorul câmp electric $\vec{E}$ 13

1.4 Câmpul electrostatic al unui sistem de sarcini discrete 15

1.5 Fluxul câmpului electric. Teorema lui Gauss. 16

1.5.1 Fluxul câmpului electric al unei sarcini punctiforme printr-o suprafaţă oarecare 17

1.5.2 Teorema lui Gauss. 18

1.6 Natura potenţială a câmpului electric 28

1.7 Diferenţă de potenţial şi potenţial electric 30

1.8 Relaţia între câmp şi potenţial 31

1.9 Linii de câmp electric şi suprafeţe echipotenţiale 33

1.9.1 Proprietăţi generale ale liniilor de cîmp şi ale suprafeţelor echipotenţiale 35

1.10 Ecuaţiile locale şi integrale ale câmpului electrostatic 39

1.11 Ecuaţiile locale pentru potenţialului electric 48

1.12 Câmpul şi potenţialul unui dipol electric 49

1.13 Câmpul şi potenţialul produs la mare distanţă de un sistem de sarcini 53

1.14 Câmpul şi potenţialul distribuţiilor sferice de sarcină. 55

1.15 Câmpul şi potenţialul distribuţiilor de sarcină cilindrice 61

1.16 Câmpul şi potenţialul distribuţiilor liniare de sarcină 63

1.17 Câmpul şi potenţialul distribuţiilor superficiale 67

1.18 Condiţii la limită pentru E_t şi E_n 70

2 Conductori în echilibru electrostatic 75
2.1 Experienţe fundamentale 75
2.2 Câmpul şi potenţialul electric al conductorilor în echilibru electrostatic 78
2.3 Câmpul şi potenţialul electric la suprafaţa conductorului . . . 79
2.4 Câmpul electric în vecinătatea suprafeţei unui conductor încărcat (Teorema lui Coulomb) 80
2.5 Presiune electrostatică 84
2.6 Fenomene de influenţă electrostatică 88
2.7 Conductori situaţi în câmp electric uniform 88
2.8 Determinarea cantitativă a sarcinii induse pe un conductor prin influenţă. Teorema elementelor corespondente. 90
2.9 Influenţă totală 92
2.10 Metoda imaginilor 93
2.11 Ecran electric 98
2.12 Aplicaţii ale fenomenului de influenţă 100
2.13 Capacitatea electrică a unui conductor izolat 101
2.13.1 Noţiunea de capacitate electrică. 101
2.13.2 Definiţie. Dimensiuni şi unităţi. 102
2.14 Capacitatea electrică a unui sistem de conductori 103
2.14.1 Coeficienţi de capacitate. 103
2.14.2 Coeficienţi de potenţial 105
2.15 Condensatorii electrici 108
2.16 Calculul capacităţii condensatorilor 111
2.16.1 Condensatorul plan 114
2.16.2 Condensatorul cilindric 117
2.16.3 Condensatorul sferic 120
2.17 Gruparea condensatorilor 121

3 Dielectrici în câmp electric **131**
3.1 Experienţe fundamentale 131
3.2 Fenomenul de polarizare a dielectricilor. 133
3.3 Vectorul polarizaţie şi densitatea sarcinilor de polarizare. Cazul polarizării uniforme 137
3.4 Susceptibilitate şi permitivitate electrică. Vectorul inducţie electrică $\vec{D}$. Relaţia dintre vectorii $\vec{E}$, $\vec{D}$ şi $\vec{P}$ 139
3.5 Potenţialul şi câmpul electrostatic al unui dielectric polarizat neuniform 142

3.5.1 Potenţialul electrostatic al unui dielectric polarizat neuniform 143
3.5.2 Ecuaţiile locale ale câmpului electrostatic în interiorul si în exteriorul unui dielectric 145
3.5.3 Câmpul electric la suprafaţa dielectricului 146
3.6 Condiţii de trecere prin suprafaţa de contact dintre doi dielectrici. 147
3.6.1 Condiţii de trecere 147
3.6.2 Refracţia liniilor de câmp la suprafaţa de separaţie a doi dielectrici 149
3.7 Ecuaţiile locale pentru potenţialul electric în interiorul, la suprafaţa şi în exteriorul dielectricului. 150
3.8 Câmpul efectiv în dielectrici. 151
3.9 Mecanisme de polarizare a dielectricilor 152
3.9.1 Mecanismul polarizării dielectricilor cu molecule nepolare. Formula lui Clausius Mosotti 152
3.9.2 Mecanismul polarizării dielectricilor cu molecule polare 157
3.9.3 Mecanismul polarizării dielectricilor izotropi cu molecule polare 158
3.10 Dielectrici neliniari. Feroelectrici. 164
3.11 Electreţi 172
3.12 Dielectrici anizotropi. 173
3.13 Dielectrici reali 174
3.13.1 Rigiditatea dielectrică 175
3.13.2 Permitivitatea 175
3.13.3 Unghiul de pierderi 176
3.14 Fenomene piezoelectrice 177
3.15 Piroelectricitate 180
3.16 Triboelectricitate 180

4 Energia electrostatică. Relaţii între energie, forţe şi cupluri 185
4.1 Energia electrostatică a unei sarcini punctiforme situate în câmpul electric. 185
4.2 Energia electrostatică a unui sistem de sarcini discrete situate în câmpul electric. 188
4.3 Energia electrostatică a unei distribuţii continue de sarcină situată în câmpul electric 190
4.4 Localizarea energiei electrostatice 193

4.5 Energia electrostatică a unui sistem de conductori în echilibru electrostatic 195
4.6 Energia electrostatică a unui condensator 197
4.7 Relaţii între forţe, cupluri şi energie. Aplicaţii 198
4.8 Energia unui dipol în câmpul electric 201
4.9 Electrometre 203
4.9.1 Electrometrul absolut 204
4.9.2 Electrometre relative 205

5 Curentul electric **211**
5.1 Curent electric tranzitoriu şi curent permanent 211
5.2 Densitate de curent electric 212
5.3 Legea lui Ohm. 218
5.3.1 Legea lui Ohm sub formă locală. Conductivitate. Rezistivitate 218
5.3.2 Legea lui Ohm sub formă integrală. Rezistenţa şi conductanţa unui conductor. 221
5.3.3 Definiţii şi Unităţi 224
5.3.4 Rezistivitatea şi conductivitatea materialelor uzuale . . 224
5.3.5 Grupări de rezistenţe 226
5.3.6 Aplicaţii ale conexiunilor serie şi paralel 227
5.4 Dependenţa rezistivităţii de diferiţi factori 229
5.4.1 Dependenţa rezistivităţii de temperatură 230
5.4.2 Dependenţa rezistivităţii de intensitatea câmpului magnetic. Magnetorezistenţă 236
5.4.3 Dependenţa rezistivităţii de intensitatea radiaţiei electromagnetice. Fotorezistenţă. 239
5.5 Metode de calcul al rezistenţelor 239
5.5.1 Metode în care se utilizează integrala finită a rezistenţei tuburilor de curent. 239
5.5.2 Metode bazate pe relaţia dintre rezistenţă capacitate conductivitate şi permitivitate (R,C, γ, ε). 241
5.6 Energia electrocinetică. Legea lui Joule 244
5.6.1 Fapte experimentale fundamentale 244
5.6.2 Legea lui Joule sub formă locală sau diferenţială 245
5.6.3 Relevanţa legii lui Joule locale în contextul teoriei clasice a conducţiei electronice prin metale 246

5.6.4 Legea lui Joule sub formă integrală pentru o porţine de conductor 247
5.6.5 Aplicaţii ale efectului Joule 248
5.7 Generalizarea legii lui Ohm 248
5.7.1 Câmp electromotor. Generator electric 248
5.7.2 Legea lui Ohm pentru o porţiune de circuit care conţine un generator electric. 249
5.7.3 Receptor electric. Câmp contra-electromotor 251
5.7.4 Forma locală a legii lui Ohm pentru o porţiune de circuit în care se află un generator şi un receptor 252
5.7.5 Forma integrală a legii lui Ohm generale pentru o porţiune de circuit conţinând generator şi receptor. 253
5.7.6 Legea lui Ohm pentru circuite închise. 255
5.8 Circuite electrice ramificate. Legile lui Kirchhoff 257
5.8.1 Legea ochiurilor de reţea 258
5.8.2 Legea nodurilor de reţea 259
5.8.3 Modalităţi de aplicaţie a legilor lui Kirchhoff 260
5.9 Teoreme ajutătoare pentru calculul curenţilor şi al tensiunilor din reţelele electrice. Aplicaţii 263
5.10 Distribuţii spaţiale de curent 272
5.10.1 Analogii între distribuţiile spaţiale ale câmpurilor şi ale curenţilor în mediile dielectrice şi conductoare 272
5.10.2 Aplicaţii 273

6 Curentul electric prin electroliţi **279**
6.1 Generalităţi 279
6.2 Disociaţia electrolitică şi disociaţia moleculelor în soluţie. . . . 280
6.3 Legea lui Ostwald. 283
6.4 Conducţia ionică. Mobilitatea ionilor.Legea lui Ohm pentru electroliţi 284
6.5 Electroliza. Reacţii chimice secundare la electrozi. 287
6.6 Legile lui Faraday 288
6.7 Interpretarea legilor lui Faraday. Determinarea sarcinii electronului. 290
6.8 Conductibilitatea electrolitică a corpurilor solide. 291
6.9 Aplicaţiile electrolizei. 292
6.10 Potenţiale electrochimice. 295
6.11 Elemente galvanice. 297

6.12 Polarizarea elementelor galvanice. 300
6.13 Fenomenul de polarizare a electrozilor prin electroliză 300
6.14 Acumulatorii electrici 302
6.15 Noi surse de curent 304

7 Recomandări bibliografice **305**

B.C.U. „M. EMINESCU" IAȘI
FIZICĂ

I

1.

(m
div
sar
sau
câr
sar
sar
O
a fo
de
bag
era
sust

resp
$\overrightarrow{F}$ c
mer
cu u
sarc
R, r
$\overrightarrow{F}$ e

B.C.U. „M. EMINESCU" IAŞI
F I Z I C Ă

Capitolul 1

Interacţiuni electrostatice în vid

1.1 Câmpul electrostatic. Legea lui Coulomb.

O sarcină electrică poate fi separată pe un corp prin diferite procedee (mecanice, termice, optice, etc.), iar prezenţa sa modifică proprietăţile mediului. În esenţă, această modificare se evidenţiază prin faptul că orice altă sarcină electrică aflată în mediul menţionat este supusă unei forţe de atracţie sau de respingere. Spaţiului care înconjoară sarcina electrică i se asociază un *câmp de forţe electrice.* Pentru a caracteriza acest *câmp electric* este necesar să determinăm cantitativ forţa de interacţiune dintre corpul care poartă sarcina Q şi un alt corp care poartă sarcina q, adus la o distanţă dată, R. O primă tentativă de a determina cantitativ această forţă de interacţiune a fost făcută de Charles Augustin Coulomb (1785). El a utilizat o balanţă de torsiune în care, un corp sferic încărcat cu sarcina Q era susţinut de o baghetă izolatoare fixă, iar corpul ce poartă sarcina q, de asemenea sferic, era situat la extremitatea unei tije izolatoare al cărei centru de greutate este susţinut de un fir de torsiune. (Fig. 1.1).

Sarcina q, mobilă într-un plan orizontal, în jurul firului de torsiune, este respinsă de sarcina Q, antrenând o torsiune a firului. Astfel, forţa electrică $\overrightarrow{F}$ de respingere dintre cele două sarcini este măsurată prin intermediul momentului cuplului mecanic de torsiune care, la rândul lui, este proporţional cu unghiul de răsucire al firului. In experimente succesive, în care se modifică sarcina Q, dublând sau triplând această sarcină, sau se micşorează distanţa R, răsucind firul cu unghiuri cunoscute, se constată că *forţa de respingere* $\overrightarrow{F}$ *este proporţională cu produsul sarcinilor* Qq *şi invers proporţională cu*

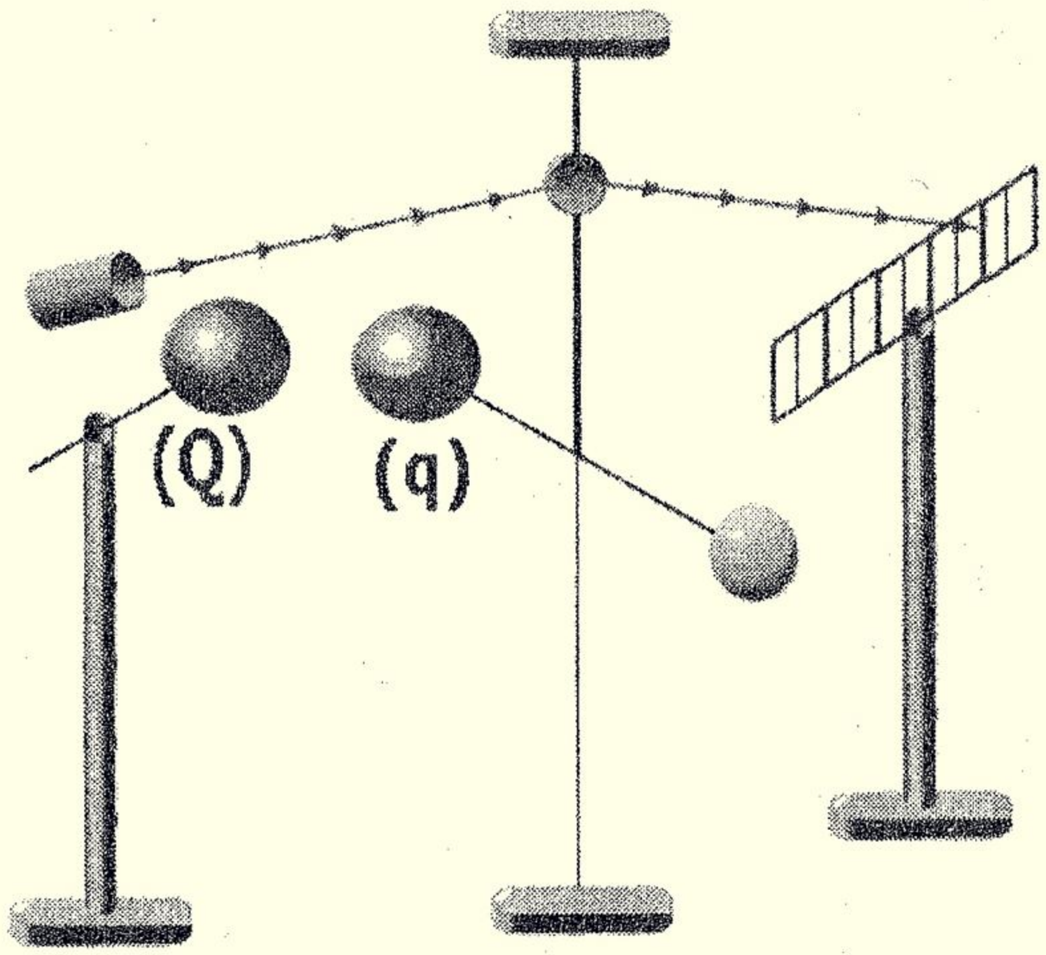


Figura 1.1: Schema experimentului efectuat de către Coulomb

pătratul distanţei R dintre centrele sferelor ce poartă aceste sarcini. Rezultatele experimentelor confirmă această lege (a lui Coulomb) cu atât mai exact cu cât diametrele celor două sfere sunt mai mici în raport cu distanţa R. Direcţia forţei $\overrightarrow{F}$ este direcţia vectorului $\overrightarrow{R}$ al cărui versor este $\overrightarrow{R}/R$:

$$\overrightarrow{F} = K\frac{Qq}{R^2}\frac{\overrightarrow{R}}{R} \tag{1.1}$$

1.2 Unităţi de măsură şi dimensiuni

Din formula (1.1), în care F şi R sunt mărimi măsurabile în circumstanţele experimentului, nu se poate determina sarcina electrică Q nici cantitativ şi nici dimensional, atât timp cât nu se cunoaşte valoarea şi dimensiunea fizică a constantei K. O altă relaţie fizică directă între Q şi K nu se cunoaşte, astfel încât, pentru a defini cantitativ şi dimensional sarcina Q într-un sistem de unităţi în care nu figurează o mărime electrică fundamentală, este necesar să se facă o convenţie relativ la valoarea şi dimensiunea constantei

K. De exemplu, dacă se consideră un sistem de mărimi fundamentale date, lungime L masă M şi timp T, (sistemul LMT) cu unităţile fundamentale corespondente, centimetrul, gramul şi secunda (sistemul de unităţi C.G.S.), este posibil să definim o unitate pentru sarcina electrică în acest sistem, făcând o convenţie privind valoarea şi dimensiunea fizică a constantei K pentru un anumit mediu în care interacţionează cele două sarcini; de exemplu, convenţia ca această constantă să fie egală cu unitatea când interacţiunea are loc în *vid*,

$$K = 1 \tag{1.2}$$

şi totodată să fie adimensională, sau să aibă dimensiunea unitate:

$$[K] = 1 \qquad \text{(adimensional)}. \tag{1.3}$$

Cu această convenţie, formula ne permite să definim *dimensiunea fizică a sarcinii electrice şi unitatea de sarcină electrică* în sistemul de unităţi C.G.S. electrostatic (e.s.). Date fiind dimensiunile fizice ale mărimilor $[F] = [MLT^{-2}]$, $[R^2] = [L^2]$ şi $[K] = 1$, rezultă în virtutea formulei că, *dimensiunea sarcinii electrice* în sistemul C.G.S. e.s. este

$$[q] = [M^{1/2}L^{3/2}T^{-1}] \tag{1.4}$$

Unitatea de sarcină electrică $Q = 1$ *u.e.s.C.G.S.* (1 franklin), se poate defini dacă se consideră că cele două sarcini sunt egale, $Q = q$, şi totodată că forţa de interacţiune dintre ele, este egală cu unitatea ($F = 1$ *dynă* în sistemul C.G.S.) când această interacţiune are loc în vid ($K = 1$) şi distanţa dintre sarcini este egală cu unitatea ($R = 1\ cm$). O definiţie a acestei unităţi trebuie să cuprindă toate aceste condiţii:

Unitatea de sarcină electrică în sistemul de unităţi C.G.S. e.s. (1 franklin), este acea sarcină electrică pozitivă care respinge, cu o forţă de o dynă, sarcina pozitivă şi egală cu ea, aflată în vid la distanţa de 1 cm.

Este evident că o altă convenţie făcută asupra valorii şi dimensiunii constantei K, va antrena altă unitate şi altă dimensiune pentru sarcina electrică. Sistemele de unităţi au un caracter istoric, adoptarea lor fiind condiţionată de cerinţele ştiinţei şi tehnicii la o epocă dată. În condiţiile actuale, această unitate s-a dovedit a fi foarte mică în numeroase aplicaţii practice, astfel încât a fost necesar să se utilizeze un sistem de unităţi şi de mărimi fundamentale adecvat noilor cerinţe. În prezent se utilizează *sistemul internaţional* de mărimi şi unităţi, ($S.I.$), în care au fost adoptate *şapte mărimi fundamentale.* Pe lângă mărimile fundamentale, *lungime, masă, timp*, (LMT) care

figurau în sistemul C.G.S., a fost introdusă o mărime electrică, *intensitatea curentului electric* (I), şi alte trei mărimi, specifice pentru domeniile chimiei, termodinamicii şi opticii, şi anume, *cantitatea de substanţă, temperatura şi fluxul luminos.* Pentru domeniul electricităţii este suficient să reţinem dintre acestea numai primele patru mărimi fundamentale $(LMTI)$, cu unităţile fundamentale corespondente, *metrul, kilogramul, secunda, amperul,* $(MKSA)$. În acest sistem sarcina electrică Q devine o *mărime derivată*, având dimensiunea

$$[Q] = [IT] \tag{1.5}$$

unitatea ei numită *coulomb*, (simbolul C), fiind de $3 \cdot 10^9$ ori mai mare decât unitatea C.G.S. e.s. dacă ţinem cont de definiţia amperului:

$$1C = 3 \cdot 10^9 franklin. \tag{1.6}$$

Problemă: Demonstraţi relaţia între 1 coulomb şi 1 franklin

În acest caz, în legea lui Coulomb, sarcina Q capătă prin convenţie dimensiunea şi unitatea date de expresiile (1.5) şi (1.6), astfel încât factorul K nu mai poate fi considerat adimensional ca în cazul sistemului de unităţi C.G.S. ci va căpăta, în virtutea formulei (1.1), dimensiunea

$$[K_{SI}] = [FR^2Q^{-2}] = [ML^3T^{-4}I^{-2}]. \tag{1.7}$$

Valoarea factorului K_{SI}, în sistemul internaţional de unităţi, se deduce transformând unităţile mărimilor F, R, Q din legea lui Coulomb, în unităţile sistemului internaţional, respectiv, 1 *dynă* $= 10^{-5}$ *newtoni*, 1 $franklin =$ $1/(3 \cdot 10^9)$*coulombi*, 1 $cm = 10^{-2}$ m.

În consecinţă, în SI, valoarea factorului de proporţionalitate din legea lui Coulomb, în condiţiile interacţiunilor electrostatice în vid, este,

$$K_{SI} = \frac{10^{-5} \cdot 10^{-4}}{1/(9 \cdot 10^{18})} = 9 \cdot 10^9 Nm^2C^{-2}. \tag{1.8}$$

Pentru simplificarea problemelor implicate de comparaţii numerice ale datelor exprimate pentru sarcina electrică în diferite sisteme de unităţi, ar părea oportun ca, în toate formulele derivate din legea lui Coulomb, să menţinem simbolic acelaşi factor de proporţionalitate K, indiferent de sistemul de unităţi, cu condiţia ca acestei constante să i se atribuie valoarea corespunzătoare sistemului de unităţi în care se exprimă celelalte mărimi din formulele

derivate considerate. Vom vedea ulterior că aceasta conduce la complicarea scrierii unor formule derivate din legea lui Coulomb, frecvent aplicate în practică, datorită faptului că, în aceste formule, factorul K apare adeseori multiplicat cu numărul irațional π, de cele mai multe ori sub forma multiplului 4π. S-a convenit în acest caz să se raționalizeze una dintre formulele cele mai uzuale, înlocuindu-se cu o altă constantă expresia $4\pi K$. De exemplu,

$$4\pi K = \frac{1}{\varepsilon_0} \tag{1.9}$$

în care constanta

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi K} = \frac{1}{36\pi 10^9} = 8,852 \cdot 10^{-12}\ C^2 N^{-1} m^{-2} \tag{1.10}$$

se numește *permitivitatea vidului.* O astfel de *operație de raționalizare* a fost aplicată formulei capacității condensatorului plan, pentru a elimina factorul irațional 4π din această formulă des utilizată. Ca o consecință a raționalizării, formula capacității condensatorului plan se scrie

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \tag{1.11}$$

în loc de

$$C = \frac{S}{4\pi K d}. \tag{1.12}$$

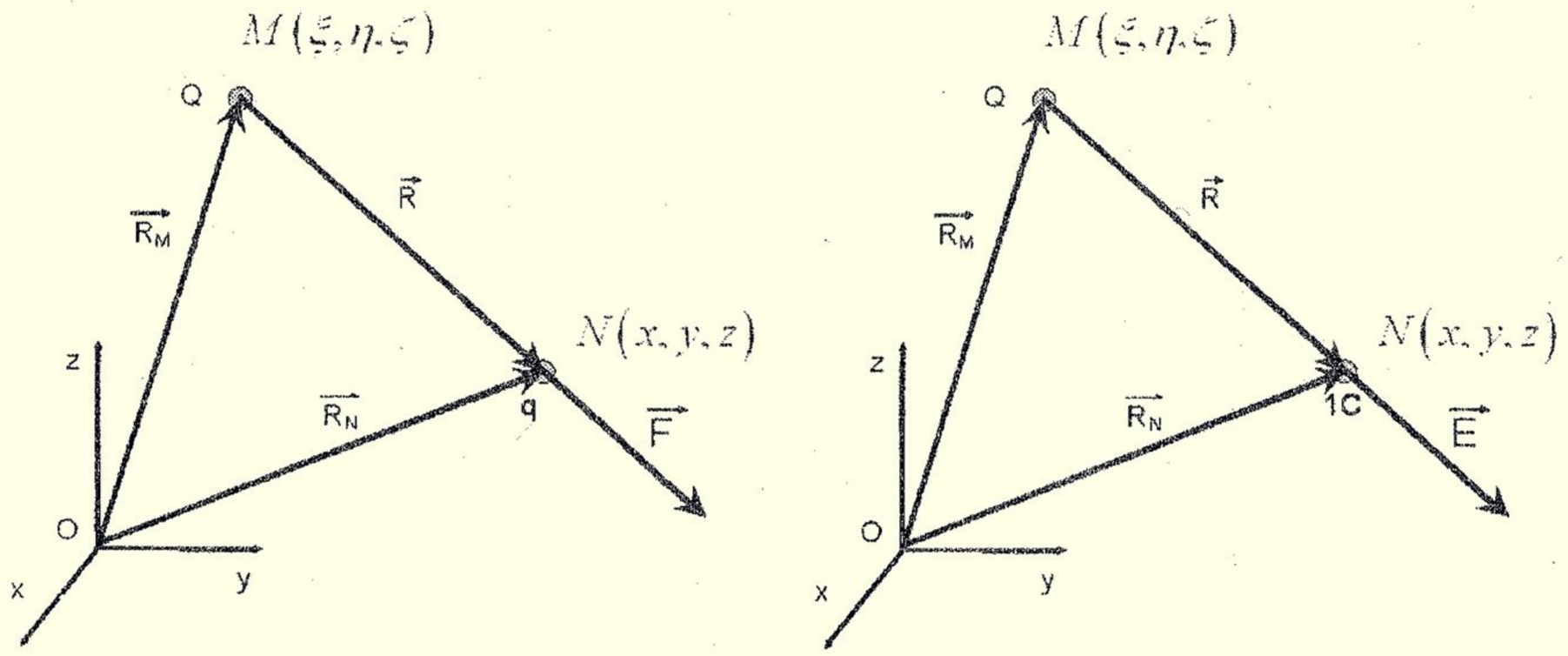
Unitatea de măsură a capacității numindu-se farad (simbolul F), se înțelege din formula capacității electrice că, unitatea de măsură a permitivi-tății este farad/metru. Astfel, în formula (1.10), unitatea de măsură a permitivității, $C^2 N^{-1} m^{-2}$ este de fapt farad/metru (F/m). Această convenție de raționalizare a formulei capacității antrenează o modificare a tuturor celorlalte formule ale electrostaticii, implicit a legii lui Coulomb. În consecință, în sistemul internațional de unități (în care formulele sunt raționalizate), legea lui Coulomb se scrie sub forma

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Qq}{R^2} \frac{\vec{R}}{R}. \tag{1.13}$$

1.3 Câmpul electrostatic.

1.3.1 Vectorul câmp electric $\vec{E}$

Considerăm o sarcină Q aflată în vid, într-un punct $M(\xi, \eta, \zeta)$ a cărui poziție într-un sistem de referință ortogonal este definită prin vectorul $\overrightarrow{R}_M$



(a) Forţa de interacţiune dintre sarcinile pozitive Q şi q

(b) Vectorul câmp electric $\vec{E}$

Figura 1.2: Interacţiunea dintre două sarcini electrice punctiforme

(Fig. 1.2(a)).

Orice altă sarcină q aflată într-un punct $N(x, y, z)$, caracterizat de vectorul de poziţie $\vec{R}_N$, este supusă unei forţe coulombiene dirijate în direcţia vectorului $\vec{R} = \vec{R}_N - \vec{R}_M$, având mărimea egală cu distanţa dintre sarcinile Q şi q. Oricare ar fi poziţia punctului N, în care se află sarcina q, asupra acesteia acţionează o forţă electrică; există deci un *câmp vectorial de forţe electrice*. Pentru a exprima această proprietate în orice punct din vecinătatea sarcinii Q, independent de mărimea sarcinii q, este mai simplu să considerăm sarcina q egală cu unitatea, $(q = 1C)$, şi să calculăm forţa care acţionează asupra unităţii de sarcină, sau, în mod echivalent, deoarece forţa care acţionează în general asupra sarcinii q este proporţională cu mărimea acesteia, să definim o nouă mărime vectorială, $\vec{E}$, care să reprezinte raportul dintre forţa care acţionează asupra lui q şi q, adică:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}\frac{\vec{R}}{R}. \tag{1.14}$$

Acest vector $\vec{E}$ caracterizează câmpul de forţe electrice, atât în intensitate cât şi în direcţie, în orice punct din vecinătatea sarcinii Q. Convenim să-l numim *vectorul câmp electric*. Formula (1.14), în care sarcina q este o mărime scalară, arată că vectorii $\vec{F}$ şi $\vec{E}$ sunt de acelaşi sens dacă $q > 0$, şi de sens contrar dacă $q < 0$. În sistemul de referinţă cartezian considerat (Fig.

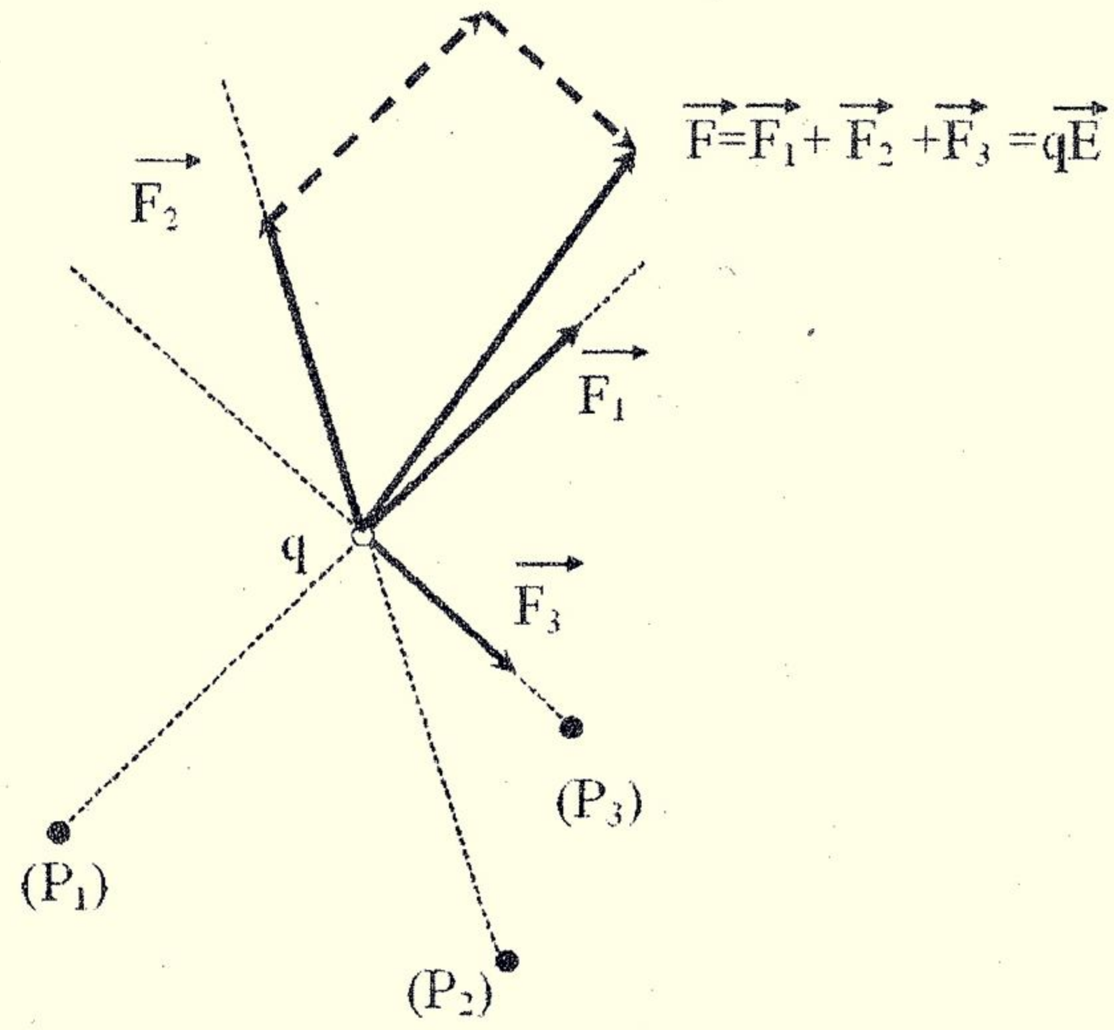


Figura 1.3: Principiul superpoziţiei. Aditivitatea vectorială a forţelor. Sarcinile Q_1, Q_2 şi q sunt pozitive iar Q_3 este negativă.

1.3.1), vectorul $\vec{R}$ este definit prin componentele sale

$$\vec{R} = \vec{R}_N - \vec{R}_M = \vec{i}\,(x-\xi) + \vec{j}\,(y-\eta) + \vec{k}\,(z-\zeta) \tag{1.15}$$

iar componentele vectorului

$$\vec{E} = \vec{i}E_x + \vec{j}E_y + \vec{k}E_z \tag{1.16}$$

sunt,

$$E_x = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x-\xi}{R^3}; E_y = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{y-\eta}{R^3}; E_z = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z-\zeta}{R^3}. \tag{1.17}$$

1.4 Câmpul electrostatic al unui sistem de sarcini discrete

Presupunem mai întâi că în punctele P_1, P_2, P_3, (Fig. 1.3) se află trei sarcini electrice, Q_1, Q_2, Q_3, care pot avea oricare dintre semnele $\pm$, fiecare dintre aceste sarcini exercitând asupra unei sarcini de probă q situată în punctul P, forţele $\vec{F}_1 = q\vec{E}_1$, $\vec{F}_2 = q\vec{E}_2$ respectiv $\vec{F}_3 = q\vec{E}_3$.

În acord cu legea de compunere a forţelor, câmpul rezultant în punctul P, în care se află sarcina q, este

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{\vec{F}_1}{q} + \frac{\vec{F}_2}{q} + \frac{\vec{F}_3}{q} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 \tag{1.18}$$

Această formulă, generalizată pentru un număr oarecare n de sarcini, poate fi scrisă sub forma următoare,

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i \tag{1.19}$$

care exprimă o *proprietate de aditivitate vectorială a câmpurilor electrice: Câmpul electric produs de un sistem de sarcini electrice într-un punct din spaţiu este egal cu suma vectorială a câmpurilor produse de fiecare sarcină în acel punct.* Aceasta este formularea pentru câmpul electrostatic a principiului superpoziţiei. Acest principiu are ò largă aplicabilitate şi valabilitatea sa se va evidenţia în liniaritatea sistemului de ecuaţii care descrie aceste fenomene. Dacă fiecare câmp produs de câte o sarcină este soluţia ecuaţiilor electrostaticii, suprapunerea celor, n" stări (soluţii) va fi tot o soluţie a sistemului de ecuaţii.

1.5 ' Fluxul câmpului electric. Teorema lui Gauss.

În cele ce urmează vom defini o mărime scalară, numită *fluxul câmpului electric* Φ, care caracterizează modul în care vectorul intensitate a câmpului electric străbate o suprafaţă plană S. Dacă se presupune că $\vec{E}$ are aceeaşi valoare în toate punctele suprafeţei plane S (câmp electric uniform), fluxul câmpului electric se defineşte ca fiind produsul dintre S şi componenta normală la S a intensităţii câmpului electric. Dacă exprimăm suprafaţa S ca o mărime vectorială definită ca $\overrightarrow{S} = \vec{n}S$ unde $\vec{n}$ reprezintă versorul normal la suprafaţă, fluxul câmpului electric este produsul scalar al vectorilor $\vec{E}$ şi $\vec{S}$:

$$\Phi = \left(\overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{S}\right) = ES\cos\alpha. \tag{1.20}$$

Rezultatul din (1.20) se poate interpreta şi în sensul că fluxul este produsul dintre intensitatea câmpului şi $S_n = Scos\alpha$, care este proiecţia suprafeţei S pe planul perpendicular pe vectorul $\vec{E}$.

În cazul în care câmpul nu este uniform prin întreaga suprafaţă, sau în cazul în care aceasta nu mai este plană, vom diviza suprafaţa în elemente

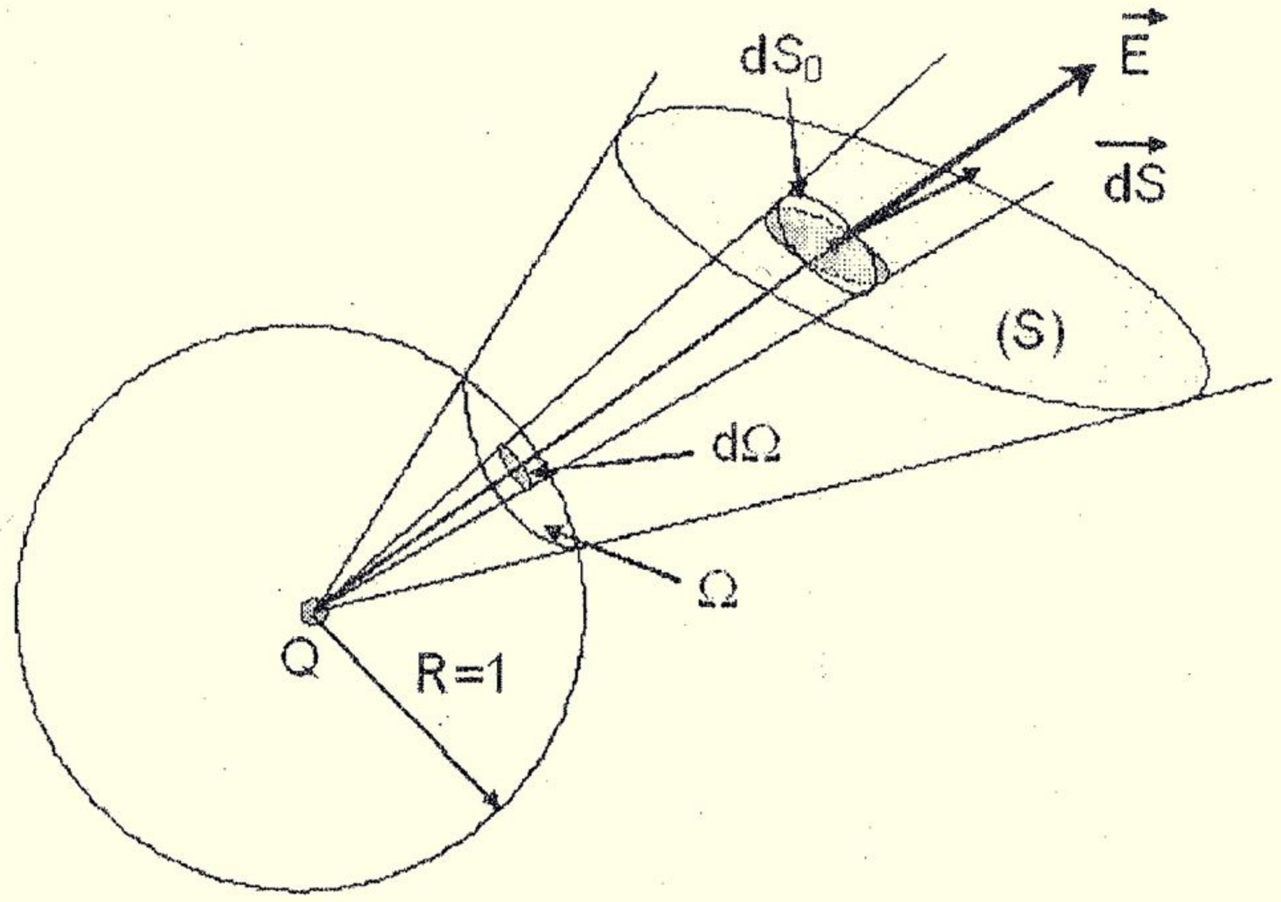


Figura 1.4: Fluxul câmpului electric printr-o suprafaţă S oarecare

suficient de mici pentru ca să poată fi considerate plane şi ca vectorul $\vec{E}$ să fie constant prin fiecare element de suprafaţă $d\vec{S}$. Astfel, fiecare element de suprafaţă va fi străbătut de fluxul elementar $d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S}$, iar fluxul total Φ se obţine sumând, sau integrând, fluxurile elementare pentru întreaga suprafaţă S:

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS}. \tag{1.21}$$

1.5.1 Fluxul câmpului electric al unei sarcini punctiforme printr-o suprafaţă oarecare

Considerăm o sarcină punctiformă Q şi o suprafaţă S de formă neregulată care se sprijină pe un contur Γ. Un element de suprafaţă infinitezimal $\overrightarrow{dS}$ aflat la distanţa $\vec{R}$ va fi străbătut de un câmp electric caracterizat de vectorul $\vec{E}$, (Fig. 1.4).

Fluxul elementar corespunzător este

$$d\Phi = \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS}, \tag{1.22}$$

sau

$$d\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}\frac{\vec{R}\cdot\overrightarrow{dS}}{R} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\left(\vec{R}\cdot\vec{n}\right)dS}{R^3} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dS\cos\alpha}{R^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dS_0}{R^2} \tag{1.23}$$

unde $dS_0 = dS\cos\alpha$ este proiecţia suprafeţei $d\vec{S}$ pe planul perpendicular pe raza $\vec{R}$, care se vede sub unghiul solid $d\Omega$ din punctul în care se află sarcina Q. Se ştie din geometrie că unghiul solid $d\Omega$ este numeric egal cu suprafaţa de pe sfera de rază $R = 1$, care este conturată de razele care pornesc din Q şi mărginesc suprafaţa elementară dS_0, şi totodată se ştie că raportul acestor suprafeţe este inversul raportului pătratului razelor lor: $(d\Omega/1^2) = (dS_0/R^2)$. Se deduce imediat că unghiul solid elementar are expresia:

$$d\Omega = \frac{\vec{R}\cdot d\vec{S}}{R^3} \tag{1.24}$$

Într-o formă generală, fluxul cîmpului electric prin întreaga suprafaţă, care se vede sub unghiul solid Ω_0 din punctul în care se află sarcina Q, este dat de expresia următoare

$$\Phi = \int_{S_0}\vec{E}\cdot\overrightarrow{dS} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\Omega_0} d\Omega = \frac{Q}{\varepsilon_0}\frac{\Omega_0}{4\pi} \tag{1.25}$$

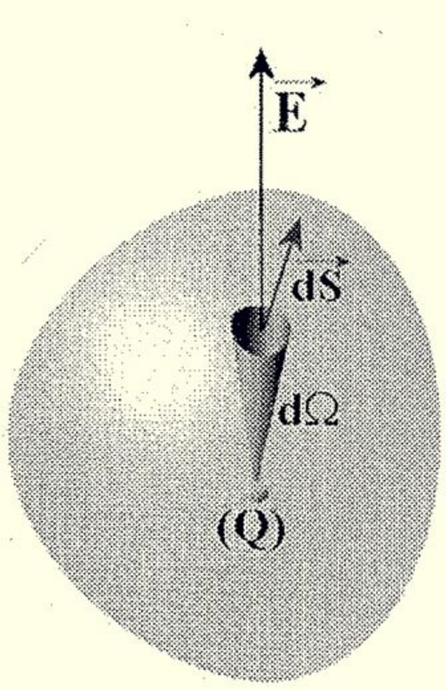
Unitatea de unghi solid se numeşte *steradian* şi acesta reprezintă unghiul solid corespunzător unui con, cu vârful în centrul unei sfere de rază egală cu unitatea, care decupează pe această sferă o suprafaţă egală cu unitatea.

1.5.2 Teorema lui Gauss.

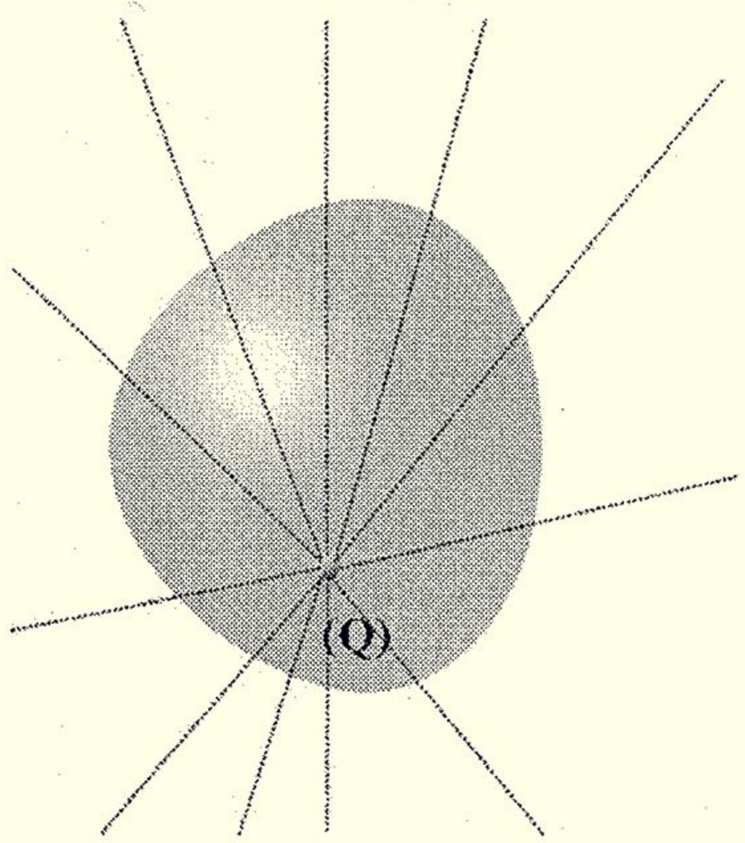
Considerăm mai întâi următoarele cazuri:

1) *Sarcina punctiformă Q se află într-un punct oarecare P din interiorul unei suprafeţe închise S* (vezi Fig. 1.5(a) şi 1.5(b)). Un element de suprafaţă dS se vede din punctul P sub unghiul solid $d\Omega$. Întreaga suprafaţă închisă se vede din acelaşi punct sub unghiul solid $\Omega = 4\pi$. Integrând fluxurile elementare $d\Phi$ pentru întreaga suprafaţă S, în acord cu formula, se obţine fluxul total

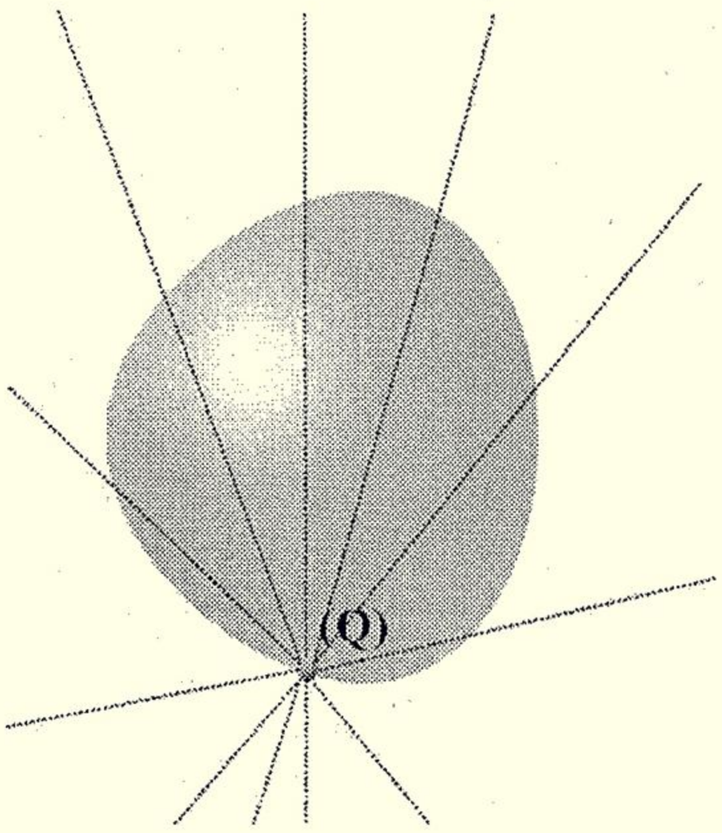
$$\Phi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{4\pi} d\Omega = \frac{Q}{\varepsilon_0}. \tag{1.26}$$



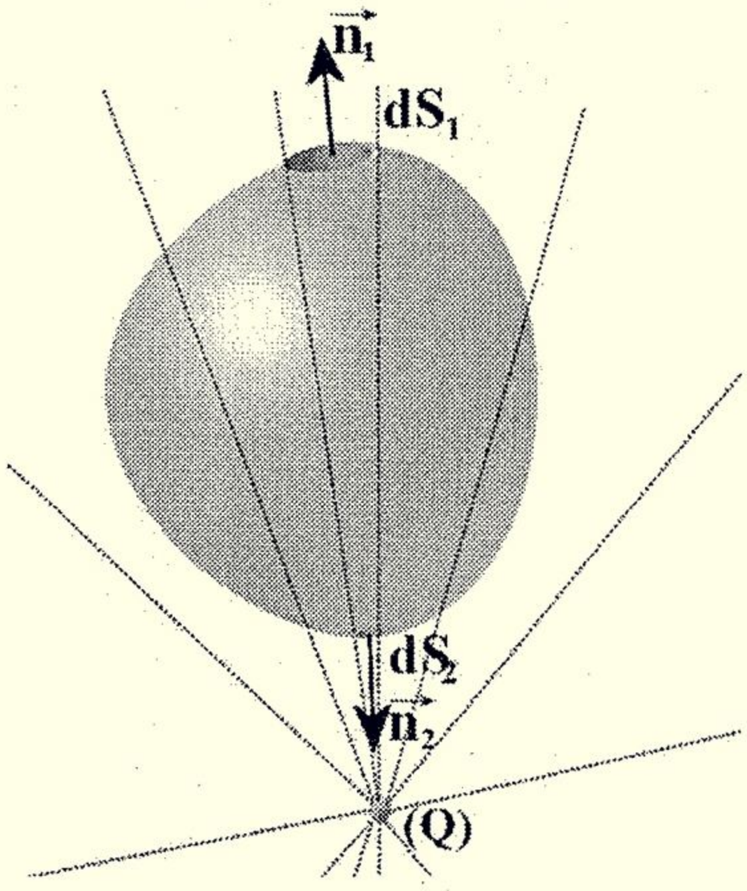
(a) Calculul fluxului câmpului electric



(b) Sarcina în interiorul suprafeţei închise



(c) Sarcina pe suprafaţă



(d) Sarcina în exteriorul suprafeţei

Figura 1.5: Teorema lui Gauss

2) *Sarcina punctiformă se află într-un punct oarecare de pe suprafaţa închisă* S, (Fig. 1.5(c)). Întreaga suprafaţă se vede din acel punct sub unghiul solid $\Omega = 2\pi$. În acest caz fluxul total prin suprafaţa S este

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} d\Omega = \frac{Q}{2\varepsilon_0} \tag{1.27}$$

3) *Sarcina punctiformă se află în exteriorul suprafeţei închise* S (Fig. 1.5(d)). Conul de raze care, pornind din punctul P în care se află sarcina Q delimitează o suprafaţă elementară dS_1, va intersecta sub acelaşi unghi solid $d\Omega$ un element de suprafaţă dS_2 de pe faţa opusă (Fig. 1.5(d)). Fluxurile elementare,

$$d\Phi_1 = \left(\vec{E}_1 \cdot \vec{n}_1\right) dS_1 \tag{1.28}$$

şi

$$d\Phi_2 = \left(\vec{E}_2 \cdot \vec{n}_2\right) dS_2 \tag{1.29}$$

sunt egale în mărime datorită faptului că ele corespund aceluiaşi unghi solid, dar, în virtutea formulei (1.25), aceste fluxuri elementare sunt totodată de semn contrar ($d\Omega_1 > 0$, $d\Omega_2 < 0$ şi $|d\Omega_1| = |d\Omega_2|$) datorită faptului că normalele $\vec{n}_1$ şi $\vec{n}_2$, fiind întotdeauna orientate spre exteriorul suprafeţei închise, formează un unghi ascuţit, respectiv un unghi obtuz cu direcţia vectorilor $\vec{E}_1$ şi $\vec{E}_2$, sau cu direcţia vectorilor $\vec{R}_1$ şi $\vec{R}_2$. În consecinţă fluxul total este nul.

$$d\Phi = d\Phi_1 + d\Phi_2 = 0 \tag{1.30}$$

În concluzie, se poate formula următoarea teoremă, numită teorema lui Gauss:

Fluxul câmpului electric, produs de o sarcină punctiformă Q printr-o suprafaţă închisă, este egal cu Q/ε_0 dacă sarcina Q se află în interiorul suprafeţei, este egal cu $Q/(2\varepsilon_0)$ dacă sarcina se află pe suprafaţă şi este egal cu zero dacă sarcina se află în exteriorul suprafeţei.

În conformitate cu principiul superpoziţiei putem extinde aplicabilitatea teoremei lui Gauss atât în cazul unui sistem de sarcini electrice discrete cât şi în cazul unor distribuţii continue de sarcină

Sistem de sarcini discrete. Dacă un număr n de sarcini discrete se află în interiorul suprafeţei închise şi un număr m de sarcini se află pe suprafaţă, teorema lui Gauss se scrie

$$\Phi = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\sum_{k=1}^{n} Q_{i,k} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} Q_{s,k}\right) \tag{1.31}$$

unde $Q_{i,k}$ reprezintă sarcinile situate în interiorul suprafeţei iar $Q_{s,k}$, sarcinile situate pe suprafaţă.

Distribuţie continuă de sarcină. Dacă numărul de sarcini este infinit de mare sistemul de sarcini apare ca o *distribuţie continuă de sarcină electrică.* Aici este necesar să distingem dacă sarcinile sunt distribuite *în volum, pe suprafaţă* sau sunt înşirate continuu pe o linie geometrică formând o *distribuţie liniară de sarcină electrică.*

1. *Distribuţii volumice de sarcină.* Sarcinile electrice sunt distribuite în întregul volum v mărginit de suprafaţa închisă S astfel încât sarcina totală poate fi definită ca o sumă a tuturor sarcinilor ΔQ asociate volumelor elementare Δv în care a fost divizat întregul volum v. Dacă distribuţia este *uniformă*, raportul $\Delta Q/\Delta v$ este independent de poziţia elementului de sarcină ΔQ în volumul v şi în acelaşi timp acest raport este o constantă ρ *care caracterizează sarcina electrică aflată în unitatea de volum*, motiv pentru care mărimea astfel definită, ρ, poate fi numită *densitate volumică de sarcină electrică.* Dacă distribuţia de sarcină nu este uniformă în întregul volum v ea poate fi definită în orice loc din spaţiul închis de suprafaţa S ca fiind limita către care tinde raportul $\Delta Q/\Delta v$ când Δv tinde către zero.

$$\rho = \lim_{\Delta v \to 0}\left(\frac{\Delta Q}{\Delta v}\right). \tag{1.32}$$

În acest caz sarcinile ΔQ şi volumele Δv devin mărimi infinitezimale, dQ şi respectiv dv, şi densitatea volumică de sarcină se scrie ca

$$\rho = \frac{dQ}{dv}(coulomb/m^3). \tag{1.33}$$

Trebuie să menţionăm faptul că limita către zero din (1.32) nu trebuie interpretată în sens strict matematic. Dacă ţinem cont de faptul că orice substanţă are o structură microscopică deosebit de complexă (molecule alcătuite din nuclee şi electroni care la rândul lor prezintă o anumită structură) şi că

particulele constituente posedă sarcină electrică, limita către zero în definiţia densităţii volumice capătă un aspect greu de acceptat pentru o mărime fizică, introdusă cu scopul caracterizării distribuţiei de sarcină. Astfel, dacă am presupune că particulele constituente ar fi in repaus, adică dacă am calcula densitatea de sarcină la un moment dat, utilizând (1.32) am găsi valori foarte mari ale densităţii în punctele în care se află electronii sau sarcinile pozitive (protonii) iar în rest densitatea ar fi zero. Mărimile găsite ar caracteriza distribuţia de sarcină din electron sau din proton şi nu pe cea macroscopică pe care dorim să o punem în evidenţă. Mişcarea foarte rapidă a sarcinilor electrice care constituie orice substanţă, face ca densitatea instantanee de sarcină definită anterior să se modifice odată cu deplasarea sarcinilor de la nivel atomic şi molecular. Pe scurt, o astfel de limită nu ar avea nici o utilitate la nivelul observaţiilor macroscopice la care am făcut referire până acum. Modalităţile de măsurare descrise şi cele la care vom mai face referire în continuare sunt în esenţa lor macroscopice. Forţele sau cuplurile de forţe care vor fi folosite în procesul de măsurare sunt rezultatul interacţiunii dintre ansambluri mari de sarcini electrice. Pentru ca mărimea denumită de noi densitate volumică de sarcină să se refere la acelaşi lucru şi să poată fi folosită practic, limita către zero în formula de definiţie trebuie înţeleasă ca o limită către un *volum foarte mic din punct de vedere fizic.* Acesta trebuie sa fie mic în raport cu neomogenităţile de distribuţie a sarcinilor dar, în acelaşi timp, trebuie să conţină un număr mare, semnificativ din punct de vedere statistic, de constituenţi microscopici, de tipul atomului sau moleculei. Această observaţie este valabilă pentru toate limitele de acest gen întâlnite în definiţiile mărimilor fenomenologice fundamentale din electromagnetism. Dacă studiem însă interacţiunile dintre elementele microscopice ale atomului sau moleculei (electroni, protoni) acolo putem folosi cu destul de bună aproximaţie modelul de sarcină punctiformă deoarece se cunoaşte faptul că diametrul nucleului este de 10^5 ori mai mic decât al "orbitei" electronului în jurul acestuia.

Sarcina totală distribuită în volumul (v) se obţine efectuând integrala de volum pentru toate elementele infinitezimale dQ,

$$Q = \int dQ = \int_v \rho dv. \tag{1.34}$$

2. *Distribuţii superficiale de sarcină.* Sarcina fiind distribuită continuu pe o suprafaţă oarecare S, considerată ca o suprafaţă pur geometrică, (fără

grosime), se defineşte densitatea superficială de sarcină σ ca fiind limita către care tinde raportul $\Delta Q/\Delta S$ când ΔS tinde la zero,

$$\sigma = \lim_{\Delta S \to 0} \left(\frac{\Delta Q}{\Delta S} \right) = \frac{dQ}{dS} (C/m^2). \tag{1.35}$$

Sarcina totală de pe suprafaţa (S) este

$$Q = \int_S \sigma dS. \tag{1.36}$$

3. *Distribuţii liniare de sarcină.* Notând cu ΔQ o sarcină elementară repartizată uniform pe o linie geometrică de lungime elementară Δl, se defineşte densitatea liniară de sarcină λ ca o mărime egală cu limita către care tinde raportul $\Delta Q/\Delta l$ când Δl tinde la zero,

$$\lambda = \lim_{\Delta l \to 0} \left(\frac{\Delta Q}{\Delta l} \right) = \frac{dQ}{dl} \tag{1.37}$$

Sarcina totală distribuită continuu pe lanţul de sarcini este:

$$Q = \int_l \lambda dl. \tag{1.38}$$

Cu aceste precizări se poate formula teorema lui Gauss într-o manieră generală, pentru o distribuţie volumică de sarcină închisă în suprafaţa S care mărgineşte volumul v:

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_v \rho dv \tag{1.39}$$

Pe de altă parte, vectorul câmp electric $\vec{E}$ capătă expresii specifice pentru diferite distribuţii de sarcină:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_v \rho \frac{\vec{R}}{R^3} dv;\ \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_S \sigma \frac{\vec{R}}{R^3} dS;\ \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_l \lambda \frac{\vec{R}}{R^3} dl. \tag{1.40}$$

Teorema lui Gauss sub forma integrală (1.39) constituie una dintre formulele fundamentale ale electricităţii. Ea oferă posibilitatea de a evalua câmpul electric al diferitelor distribuţii de sarcină, în special când suprafeţele au forme geometrice simple (sferă, cilindru, elipsoid, plan). Această

teoremă devine greu de utilizat dacă densitatea de sarcină este variabilă de la un punct la altul al distribuţiei.

In acest caz este necesar să se cunoască aceste densităţi ca funcţie de poziţie. Aceleaşi restricţii sunt valabile şi pentru determinarea câmpului electric al diferitelor distribuţii în cazul utilizării legii lui Coulomb şi principiului superpoziţiei. Pentru determinarea vectorului $\vec{E}$ este necesar să se cunoască cele trei componente ale sale, fapt care implică utilizarea a trei relaţii. Calculele ar fi mult simplificate dacă ar exista posibilitatea de a determina câmpul electric pornind de la o mărime scalară. Această posibilitate există şi ea va fi prezentată în paragraful următoar. Mai întâi vom mai face doar o observaţie legată de problema raţionalizării formulelor electrostaticii.

Dacă în toate formulele exprimate până aici s-ar fi conservat expresia legii lui Coulomb în forma sa primară dată în formula (1.1), fără să fi inlocuit factorul K prin expresia formulată anticipat în (1.8), formula fluxului câmpului electric creat de o sarcină printr-o suprafaţă cuprinsă în unghiul solid (1.19) ar fi trebuit să capete forma :

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = KQ \int_0^{\Omega} d\Omega \tag{1.41}$$

În aceste condiţii, teorema lui Gauss, (1.20) capătă forma următoare,

$$\Phi = KQ \int_0^{4\pi} d\Omega = 4\pi KQ \tag{1.42}$$

Convenţia de raţionalizare a acestei formule constă în înlocuirea factorului iraţional $4\pi K$, printr-o constantă dependentă de natura mediului, care în cazul vidului este $\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi K}$ şi se *numeşte permitivitatea vidului.* S-a văzut deja că, în sistemul internaţional SI, $K = 9 \cdot 10^9$ şi astfel:

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi 10^9} = 8,852.10^{-12} F/m. \tag{1.43}$$

În consecinţă teorema lui Gauss capătă formele obţinute în (1.20), (1.23) sau în (1.31), şi legea lui Coulomb capătă forma dată în (1.10). Astfel, toate formulele care au fost scrise în acest text până aici, şi cele care urmează, sunt exprimate în SI raţionalizat.

Aplicaţii

1. Un cub de latura a poarta în fiecare vârf o sarcina punctiforma q. Calculaţi forţa ce acţionează asupra fiecărei sarcini.

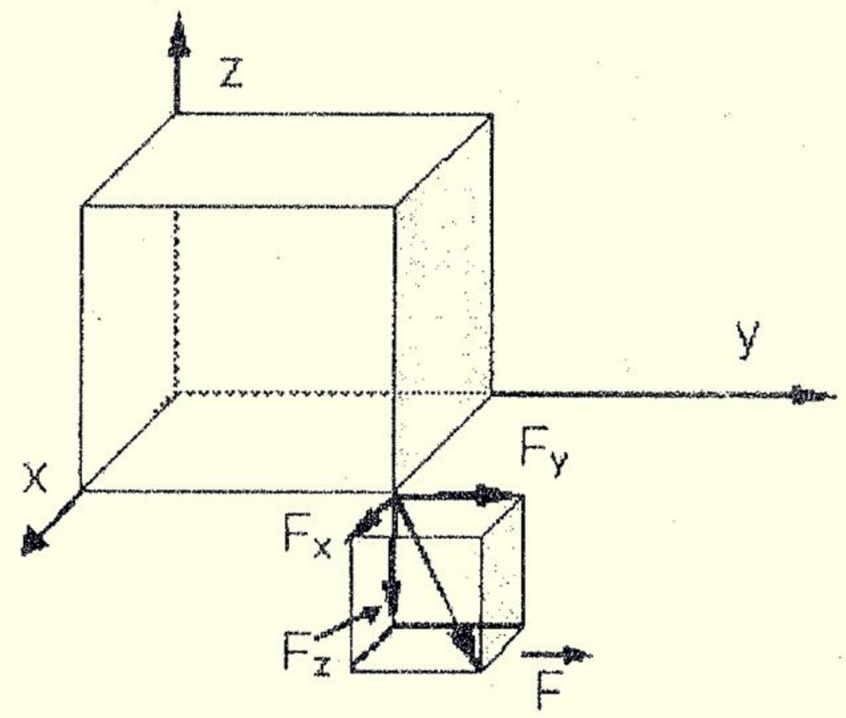


Figura 1.6: Figura la problema 1

2. Doua sarcini egale, punctuale şi pozitive se află la distanţa $2a$. O sarcină punctuală de probă este plasată într-un plan median. Calculaţi raza r a cercului de simetrie din acest plan pentru care forţa ce acţionează asupra sarcinii de probă are valoarea maximă.

3. O sarcina Q este împărţită în două părţi q şi $(Q - q)$. Care trebuie sa fie legătura dintre Q ş i q pentru ca forţa de repulsie coulombiană dintre cele doua pă rţi plasate la o distanţă data, să fie maximă?

4. O sarcina Q este plasată în două colţuri opuse ale unui pătrat şi o altă sarcină q în celelalte două colţuri. Dacă forţa electrică rezultantă asupra lui Q este nulă, care este legătura dintre Q si q? Poate fi ales q astfel încât forţa rezultantă asupra fiecărei sarcini sa fie zero?

5. O sarcină electrică q_0 se află în punctul P de echilibru sub acţiunea forţelo electrice. Distanţa de la O la M este l. a) Determinaţi poziţia punctului P; b) Studiaţi stabilitatea echilibrului;

6. Două sarcini punctuale q_1 şi q_2 se găsesc pe axa Ox în punctele $O(0)$ respectiv $A(l)$. Sa se reprezinte grafic modulul intensităţii câmpului în funcţie de x. Determinaţi poziţia punctului în care intensitatea câmpului electric se anulează.

7. În vârfurile unui triunghi echilateral se află sarcini electrice punctuale. Să se determine intensitatea câmpului electric în centrul de simetrie pentru

Figura 1.7: Figură la problema 5

cazurile din figura:

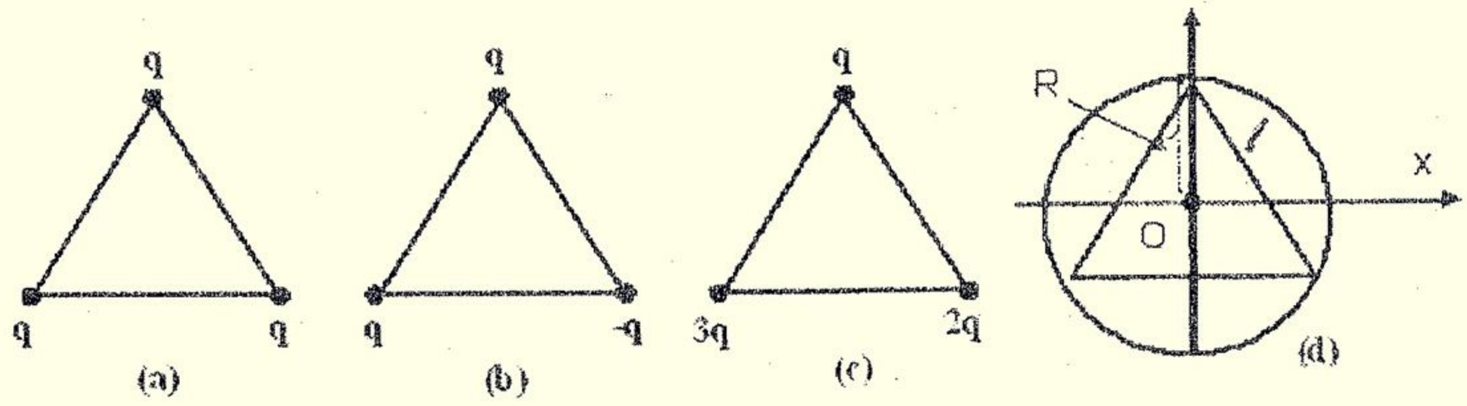
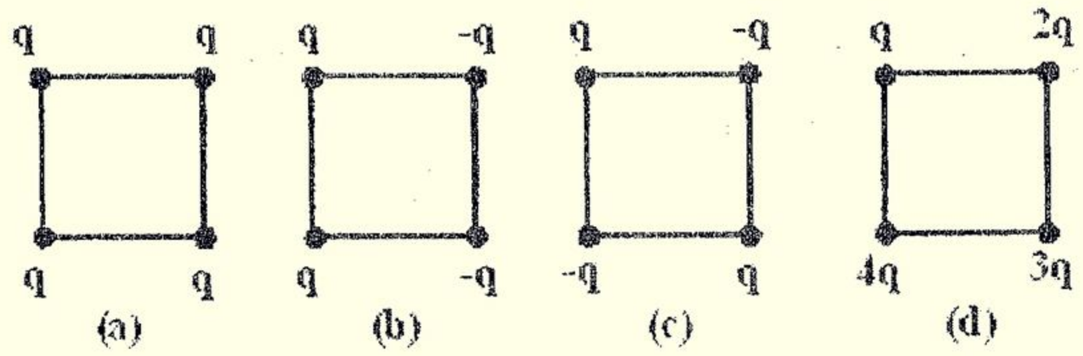


Figura 1.8: Figura la problema 7

8. În vârfurile unui pătrat se află sarcini electrice punctuale. Să se determine intensitatea câmpului electric în centrul pătratului în următoarele cazuri:



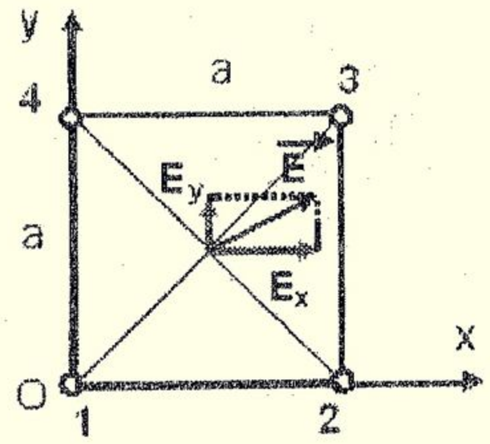


Figura 1.9: Figura la problema 8

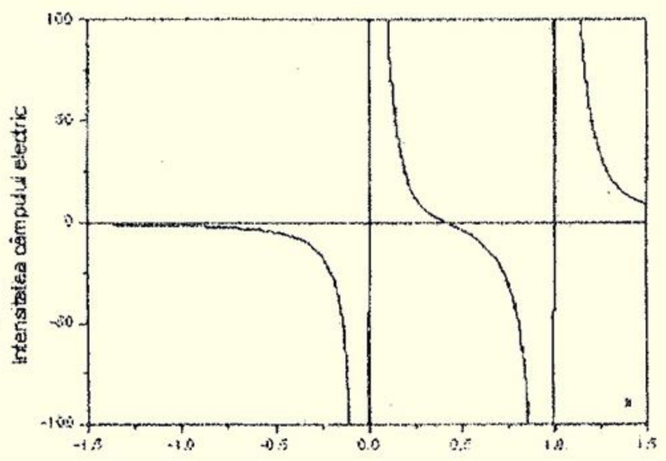
9. În vârfurile unui poligon regulat cu n laturi se află sarcini egale q. Dacă se cunoaşte raza cercului circumscris poligonului r_0, sa se calculeze intensitatea câmpului electric pe axa de simetrie a acestuia.

10. În vârfurile unui poligon regulat cu $2n$ laturi se află n sarcini pozitive q şi n sarcini negative, $-q$. Dacă sarcinile pozitive alternează cu sarcini

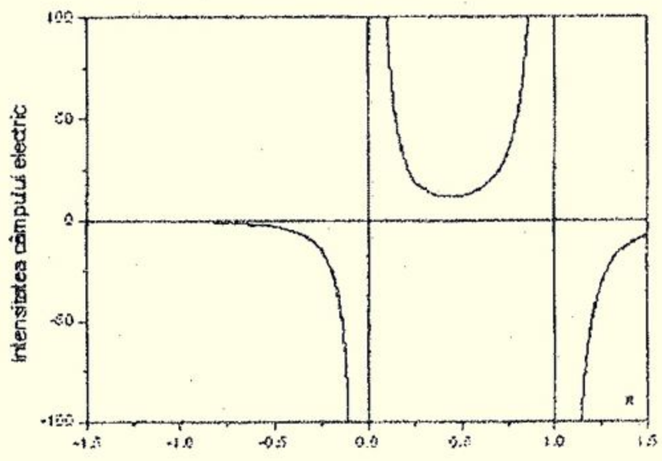
negative să se calculeze intensitatea câmpului electric pe axa de simetrie a poligonului. Se cunoaşte raza cercului circumscris r_0.

Răspunsuri

$1.F = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)$; 2. $r = \frac{a}{\sqrt{2}}$;3. $Q = 2q$; 4. $Q = -2\sqrt{2}q$; Nu; 5. $x = \frac{l}{3}$; Echilibru stabil dacă sarcina de probă se poate deplasa doar pe axa Ox. Dacă este permisă deplasarea în orice direcţie în spaţiu, echilibrul este instabil. ; 6. a. $q_1 = 1, q_2 = 2$; b. $q_1 = 1, q_2 = -2$; $x = \frac{l}{1+\sqrt{\frac{q_2}{q_1}}}, q_1 q_2 > 0$; 7. a.$E_x = 0, E_y = 0$; ; b.$E_x = \frac{q\sqrt{3}}{4\pi\epsilon_0 R^2}, E_y = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$; ;



(a) Cazul 6a



(b) Cazul 6b

Figura 1.10: Răspuns la problema 6

c.$E_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}\frac{\sqrt{3}}{2}, E_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}\frac{3}{2}$. ; 8. $E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a^2}\sqrt{2}\left(q_1 - q_2 - q_3 + q_4\right) E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a^2}\sqrt{2}\left(q_1 + q_2 - q_3 - q_4\right)$; a.$E_x = 0, E_y = 0; b.E_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2}4\sqrt{2}; E_y = 0$; ; c.$E_x = 0; E_y = 0; d.E_x = 0; E_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2}4\sqrt{2}$; ; 9. Dacă notăm sarcina de pe axa Ox cu 1 şi numerotăm în sens trigonometric, într-un punct pe axa Oz, la distanţa z oarecare pe această axă, câmpul creat de sarcina cu numărul "i" are componentele: $\begin{cases} E_x = -E_\perp \cos\left[(i-1)\frac{2\pi}{n}\right] \\ E_y = -E_\perp \sin\left[(i-1)\frac{2\pi}{n}\right] \\ E_z = E_\parallel \end{cases}$;

cu notaţiile: $\begin{cases} E_\perp = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{z}{\left(r_0^2+z^2\right)^{3/2}} \\ E_\parallel = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r_0}{\left(r_0^2+z^2\right)^{3/2}} \end{cases}$.

Cele "n" sarcini vor produce în acelaşi punct câmpul:

$\begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = 0 \\ E_z = nE_\parallel \end{cases}$. 10. $\begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = 0 \\ E_z = 0 \end{cases}$.

1.6 Natura potenţială a câmpului electric

În cele ce urmează vom arăta că studiul problemei lucrului efectuat de forţele electrostatice pentru a deplasa o sarcină electrică, ne oferă posibilitatea de a exprima mărimea vectorială $\vec{E}$ cu ajutorul unei funcţii scalare. Într-o primă aproximaţie să considerăm câmpul de forţe electrostatice ca fiind datorat unei sarcini punctiforme Q fixe. Presupunem că, în acest câmp, o sarcină q, aflată la distanţa $\vec{R}$ de sarcina Q, se deplasează pe un drum oarecare între punctele A şi B, definite prin vectorii de poziţie $\vec{R}_A$ şi $\vec{R}_B$ (Fig. 1.11). Poate părea paradoxal că discutăm despre deplasarea sarcinii q în cadrul studiului fenomenelor electrostatice în care sarcinile electrice nu sunt în mişcare. Să precizăm care este semnificaţia acestei analize. În primul rând să observăm că sarcina q pozitivă este respinsă (dacă cele două sarcini Q şi q sunt de acelaşi semn) de forţa electrostatică $\vec{F}$ dar ea poate să rămână fixă dacă aplicăm din exterior o forţă $\vec{F}_{ex}$ egală în modul şi dirijată în sens opus forţei electrostatice $\vec{F}$

$$\vec{F} = -\vec{F}_{ex}. \tag{1.44}$$

Figu

Modificând forţa exterioară, sarcina q se poate deplasa. Dacă mişcarea se face foarte lent, cvasistatic, putem presupune că, practic, în fiecare moment forţa electrostatică şi cea exterioară sunt egale şi de sensuri contrare. Pentru a înţelege mai bine aspectele energetice legate de interacţiunile electrostatice să discutăm un exemplu simplu. Pentru a crea un sistem de sarcini electrice din sarcini de acelaşi semn, aflate la distanţe foarte mari, forţa exterioară trebuie să efectueze un lucru mecanic. Dacă sarcinile electrice sunt lăsate libere, forţa electrostatică de respingere dintre sarcini efectuează un lucru mecanic asupra mediului exterior. Aşa cum se cunoaşte din mecanică, această capacitate a unui sistem de a efectua lucru mecanic atunci când este lăsat liber, este caracterizată de mărimea fizică numită *energie potenţială*. Ajungem astfel la problema introducerii noţiunii de *potenţial electric al sarcinii* Q. Presupunem că forţa electrostatică $\vec{F}$ ar deplasa sarcina q pe o porţiune elementară de dru n $\overrightarrow{dl}$ (Fig. 1.11).

elem
şi o v

şi

Lucru
de la

Lucrul elementar dW efectuat pentru această deplasare este dat de produsul scalar

în care

$$dW = \vec{F} \cdot \overrightarrow{dR} = q\left(\vec{E} \cdot \overrightarrow{dR}\right) \tag{1.45}$$

$$\int_A^B dC$$

Produsul $\vec{E} \cdot \overrightarrow{dR}$ are semnificaţia fizică a unui *lucru efectuat de forţa electrică pentru a face ca o sarcină egală cu unitatea,* $(q = 1C)$, *să circule pe distanţa*

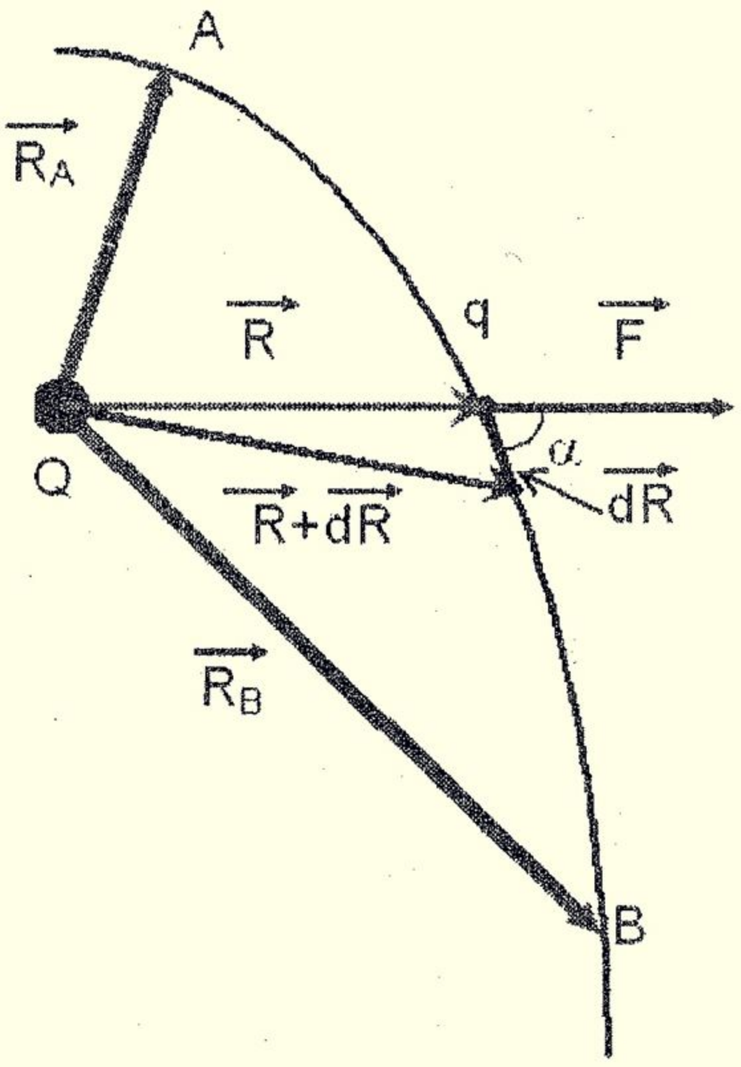


Figura 1.11: Evaluarea lucrului mecanic efectuat de forţa electrostatică $\vec{F}$ pentru deplasarea sarcinii q.

elementară în sensul vectorului $\overrightarrow{dR}$. Vom nota această mărime scalară cu dC şi o vom numi *circulaţia vectorului* $\vec{E}$ pe distanţa $\overrightarrow{dR}$.

$$dC = \vec{E} \cdot \overrightarrow{dR} = E dR \cos\alpha \tag{1.46}$$

şi

$$dW = q dC \tag{1.47}$$

Lucrul total efectuat de forţa $\vec{F}$ pentru a deplasa sarcina pe întregul drum de la A la B se obţine efectuând integrala

$$\int_A^B dW = q \int_A^B dC \tag{1.48}$$

în care

$$\int_A^B dC = C_B - C_A = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_A^B \frac{\vec{R}}{R^3} \cdot d\vec{R} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_A^B \frac{dR}{R^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B} \right) \tag{1.49}$$

unde am folosit proprietatea $\vec{R} \cdot d\vec{R} = RdR$ (Demonstraţi această relaţie !).

Se observă imediat că circulaţia nu depinde de forma drumului ci numai de poziţiile extremităţilor acestui drum date prin vectorii de poziţie $\vec{R}_A$ şi $\vec{R}_B$. *Circulaţia este conservativă.* Este evident că, *dacă circulaţia vectorului* $\vec{E}$ *se efectuează pe un circuit închis,* $A \rightarrow B \rightarrow A$, *circulaţia este nulă:*

$$\oint \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} = 0. \tag{1.50}$$

1.7 Diferenţă de potenţial şi potenţial electric

Ar fi util să introducem o mărime scalară V care să reprezinte circulaţia cu semnul schimbat, pentru a face să corespundă acelaşi semn termenilor cu acelaşi indice din ecuaţia (1.49). Numim această mărime potenţial electric, şi îl definim prin:

$$dV = -dC \tag{1.51}$$

Ecuaţia (1.49) capătă forma următoare

$$V_A - V_B = C_B - C_A = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B}\right) \tag{1.52}$$

care exprimă o diferenţă de potenţial dintre punctele A şi B, ca o funcţie numai de poziţiile acestor puncte. Semnificaţia fizică a mărimilor V_A şi V_B este aceea a lucrului mecanic efectuat de o forţă exterioară, (împotriva forţei electrostatice, având în vedere schimbarea semnului circulaţiei), pentru a transporta cvasistatic sarcina unitară ($q = 1C$)) între punctele A şi B. Aceste mărimi sunt deci în relaţie directă cu energia potenţială a sarcinii q în câmpul de forţe al sarcinii Q. Ecuaţia (1.52) ar putea să sugereze că potenţialele V_A şi V_B pot fi definite fiecare prin termenii lor corespunzători din membrul al doilea, dar aceasta nu este adevărat deoarece această ecuaţie rămâne neschimbată dacă exprimăm aceste potenţiale sub forma:

$$V_A = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_A} + K \quad \text{şi} \quad V_B = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_B} + K \tag{1.53}$$

în care K este o constantă aditivă. Astfel, potenţialul devine nedefinit deoarece K poate să capete o infinitate de valori. Problema calibrării potenţialelor, sau problema definirii unui potenţial de referinţă, se rezolvă făcând o convenţie asupra valorii constantei K în circumstanţe fizice bine definite. De

exemplu, dacă punctul B este îndepărtat până la infinit, $R_B \to \infty$ ecuaţia (1.53) dă $V_\infty = K$. *Prin convenţie* se dă lui K valoarea zero, $(K = 0)$, şi astfel se obţine $V_\infty = 0$. În consecinţă, scara valorilor potenţialelor are ca origine valoarea potenţialului la infinit unde $V = 0$. Acum se poate formula în general expresia potenţialului electric al sarcinii Q

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R} \tag{1.54}$$

Astfel, *potenţialul electric al sarcinii punctiforme Q într-un punct la distanţa R se defineşte ca fiind o mărime scalară, numeric egală cu lucrul efectuat de forţele electrostatice pentru a deplasa sarcina unitară $q = 1C$ de la distanţa R până la infinit, sau altfel, ca o mărime numeric egală cu lucrul efectuat de forţele exterioare pentru a aduce sarcina unitară de la infinit la distanţa R.* Potenţialul definit în acest fel este numit *potenţial coulombian.* La infinit potenţialul coulombian este nul. Formulele (1.54, (1.47), (1.51)) oferă posibilitatea să definim dimensiunile fizice ale potenţialului şi unitatea de măsură a acestuia în diferite sisteme de unităţi. Ecuaţia dimensională a potenţialului, care rezultă din coroborarea acestor formule, dă dimensiunea potenţialului electric în sistemul internaţional SI:

$$[V] = \left[\frac{W}{q}\right] = ML^2T^{-3}I^{-1} \tag{1.55}$$

Unitatea de măsură a potenţialului electric se numeşte *volt*. Ea poate fi definită din relaţia, $1volt = 1joule/1coulomb$, dar definiţia standard va fi dată în cele ce urmează în circumstanţe adecvate pentru descrierea etalonului de măsură pentru această mărime.

1.8 Relaţia între câmp şi potenţial

Formulele (1.45), (1.47) şi (1.51) ne permit să scriem următoarea relaţie lintre potenţialul V ca mărime scalară şi câmpul electric ca mărime vectorială

$$dV = -\vec{E}\cdot\overrightarrow{dl} \tag{1.56}$$

Această formulă este generală şi pentru distribuţii de sarcină. Într-un sistem de coordonate carteziene, potenţialul este o funcţie de poziţie $V(x, y, z)$ iar vectorii $\vec{E}$ şi $\overrightarrow{dl}$ sunt daţi prin componentele lor,

$$\vec{E} = \vec{i}E_x + \vec{j}E_y + \vec{k}E_z \tag{1.57}$$

$$\vec{dl} = \vec{i}dx + \vec{j}dy + \vec{k}dz. \tag{1.58}$$

Dacă $V(x, y, z)$ este o funcţie continuă, derivabilă şi cu derivate continue, ea poate fi formulată ca o diferenţială totală exactă

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz \tag{1.59}$$

Introducând aceste expresii, (1.57),(1.58),(1.59) în formula (1.56), se obţin componentele vectorului $\vec{E}$:

$$\begin{cases} E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \\ E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \\ E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \end{cases} \tag{1.60}$$

şi

$$\vec{E} = -\vec{i}\frac{\partial V}{\partial x} - \vec{j}\frac{\partial V}{\partial y} - \vec{k}\frac{\partial V}{\partial z} \tag{1.61}$$

Această formulă este o formă generală a relaţiei dintre câmpul şi potenţialul electric şi poate fi scrisă mai simplu sub forma

$$\vec{E} = -gradV \tag{1.62}$$

sau

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V \tag{1.63}$$

în care *grad* sau $\vec{\nabla}$ (nabla) este operatorul vectorial

$$grad = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z} = \vec{\nabla} \tag{1.64}$$

iar $radV$ sau $\vec{\nabla}V$ este o funcţie vectorială care are drept componente derivatele parţiale ale funcţiei scalare V în raport cu cele trei coordonate, x, y, z. Se poate demonstra imediat o proprietate de aditivitate a potenţialelor create de un sistem de sarcini discrete într-un punct din spaţiu. Câmpul şi potenţialul unei sarcini oarecare, Q_i din acest sistem, într-un punct dat, sunt $\vec{E}_i$ respectiv V_i şi relaţia dintre aceste mărimi este $\vec{E}_i = -gradV_i$ Dar câmpul electric $\vec{E}$ al tuturor sarcinilor sistemului în acelaşi punct se supune legii de

aditivitate geometrică formulate deja $\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i$. În virtutea acestei legi se poate scric, pentru întregul sistem de n sarcini, relaţia următoare:

$$\vec{E} = -gradV = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i = -\sum_{i=1}^{n} gradV_i = -grad \sum_{i=1}^{n} V_i \qquad (1.65)$$

Prima şi ultima variantă a acestor egalităţi conduc la relaţia

$$V = \sum_{i=1}^{n} V_i \qquad (1.66)$$

care exprimă o proprietate de aditivitate a potenţialelor create de toate sarcinile sistemului într-un punct dat şi anume, potenţialul sistemului de sarcini este egal cu suma potenţialelor fiecărei sarcini în acelaşi punct din spaţiu.

1.9 Linii de câmp electric şi suprafeţe echipotenţiale

Aşa cum am mai menţionat în secţiunile precedente, noţiunea fundamentală cu care lucrăm în electrostatică, dar, vom vedea în capitolele următoare, şi în electromagnetism în general, este aceea de câmp. Pentru a defini complet un câmp, de exemplu cel electrostatic, trebuie să precizăm valoarea vectorului intensitate a câmpului electrostatic, $\vec{E}$, în *toate* punctele spaţiului. "Înţelegerea" oricărei noţiuni din fizică implică de cele mai multe ori necesitatea de a avea o reprezentare geometrică, pe care să putem sprijini raţionamentele noastre. Pentru a putea folosi cu mai mare uşurinţă noţiunile fizice avem nevoie de aceste "imagini" ajutătoare, de aceste reprezentări. Deoarece reprezentarea matematică a câmpului electrostatic se poate face atât prin intermediul potenţialului scalar cât şi prin vectorul intensitate a câmpului electrostatic, vom avea şi doua reprezentări geometrice, echivalente, ale câmpului electrostatic. Pentru reprezentarea prin potenţialul scalar vom folosi *suprafeţele echipotenţiale* iar pentru reprezentarea vectorială vom folosi *liniile de câmp.*

Linii de câmp electric

Vom analiza mai întâi reprezentarea câmpului electric prin *linii de câmp electric* care sunt curbe la care direcţia vectorului câmp electric $\vec{E}$ este tangentă în orice punct al lor (Fig. 1.12). Exprimarea matematică a acestei proprietăţi este:

$$\vec{E} \times \vec{dl} = 0 \qquad (1.67)$$

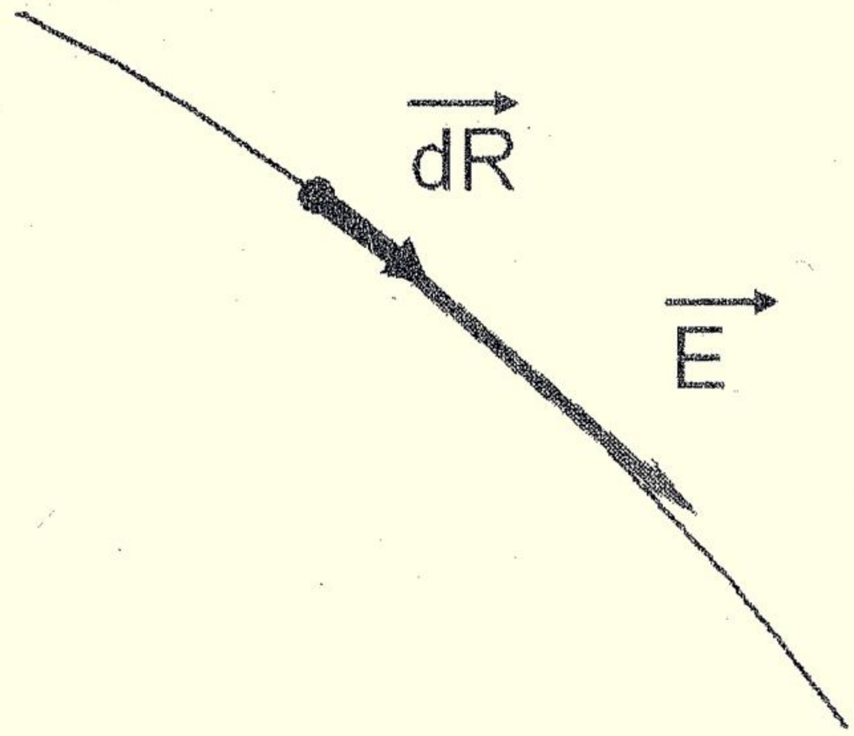


Figura 1.12: Linie de câmp

care spune că vectorul $\vec{E}$ este paralel cu orice porţiune elementară, $\overrightarrow{dl}$, din linia de camp. Aceasta este de fapt ecuaţia diferenţială a liniei de câmp. Ea poate fi scrisă detaliat sub forma:

$$\vec{E} \times \overrightarrow{dl} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ E_x & E_y & E_z \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\,(E_y dz - E_z dy) + \vec{j}\,(E_z dx - E_x dz) + \vec{k}\,(E_x dy - E_y dx) = 0 \qquad (1.68)$$

După identificarea cu zero a fiecărei componente se obţine un sistem de două ecuaţii diferenţiale care se scrie astfel:

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}. \qquad (1.69)$$

Suprafeţe echipotenţiale.

Prin definiţie, o suprafaţă echipotenţială reprezintă locul geometric al tuturor punctelor din spaţiu în care potenţialul are o valoare dată. Ecuaţia unei suprafeţe echipotenţiale se scrie sub forma:

$$V\,(x, y, z) = const. \qquad (1.70)$$

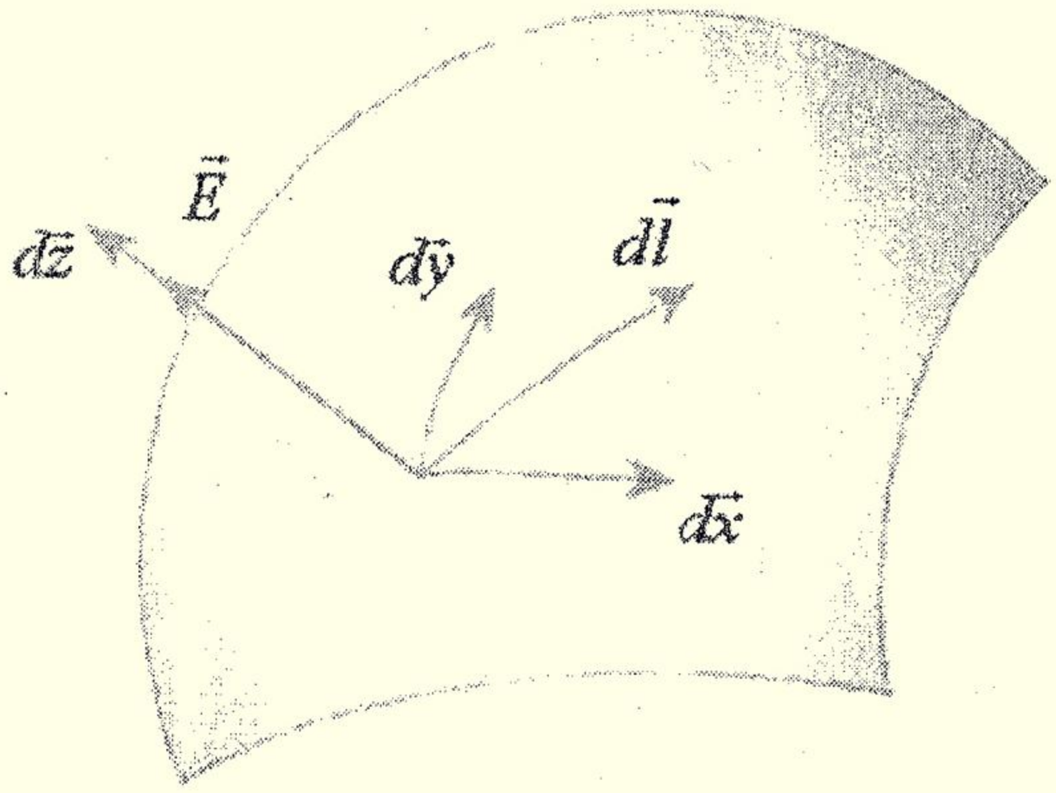


Figura 1.13: Liniile de câmp sunt perpendiculare pe suprafeţele echipotenţiale

1.9.1 Proprietăţi generale ale liniilor de cîmp şi ale suprafeţelor echipotenţiale

Aşa cum am mai menţionat, reprezentarea geometrică a câmpului se poate face atât prin linii de câmp cât şi prin suprafeţe echipotenţiale. Remarcăm faptul că aceste reprezentări trebuie sa respecte anumite reguli care sunt o consecinţă directă a legilor la care se supune câmpul electrostatic. Iată câteva din aceste reguli:

Liniile de cîmp electric sunt perpendiculare pe suprafaţa echipotenţială

Într-adevăr, dacă se calculează variaţia potenţialului între două puncte pe o suprafaţă echipotenţială ($V = ct.$) obţinem $dV = 0$ şi, în acest caz, ecuaţia (1.56) devine,

$$\vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} = 0 \tag{1.71}$$

ceea ce înseamnă că vectorul $\vec{E}$ este perpendicular pe orice element de lungime $\overrightarrow{dl}$ de pe suprafaţa echipotenţială (Fig.1.13). În mod echivalent, aceasta înseamnă că linia de câmp este perpendiculară pe suprafaţa echipotenţială.

Aceeaşi concluzie se poate trage direct din relaţia dintre intensitatea câmpului electric şi potenţialul electric (1.62). Din analiza vectorială se cunoaşte că vectorul $gradV$ este perpendicular pe suprafaţa $V = const$ (echipotenţială). Rezultă că vectorul intensitate a câmpului electric este perpendicu-

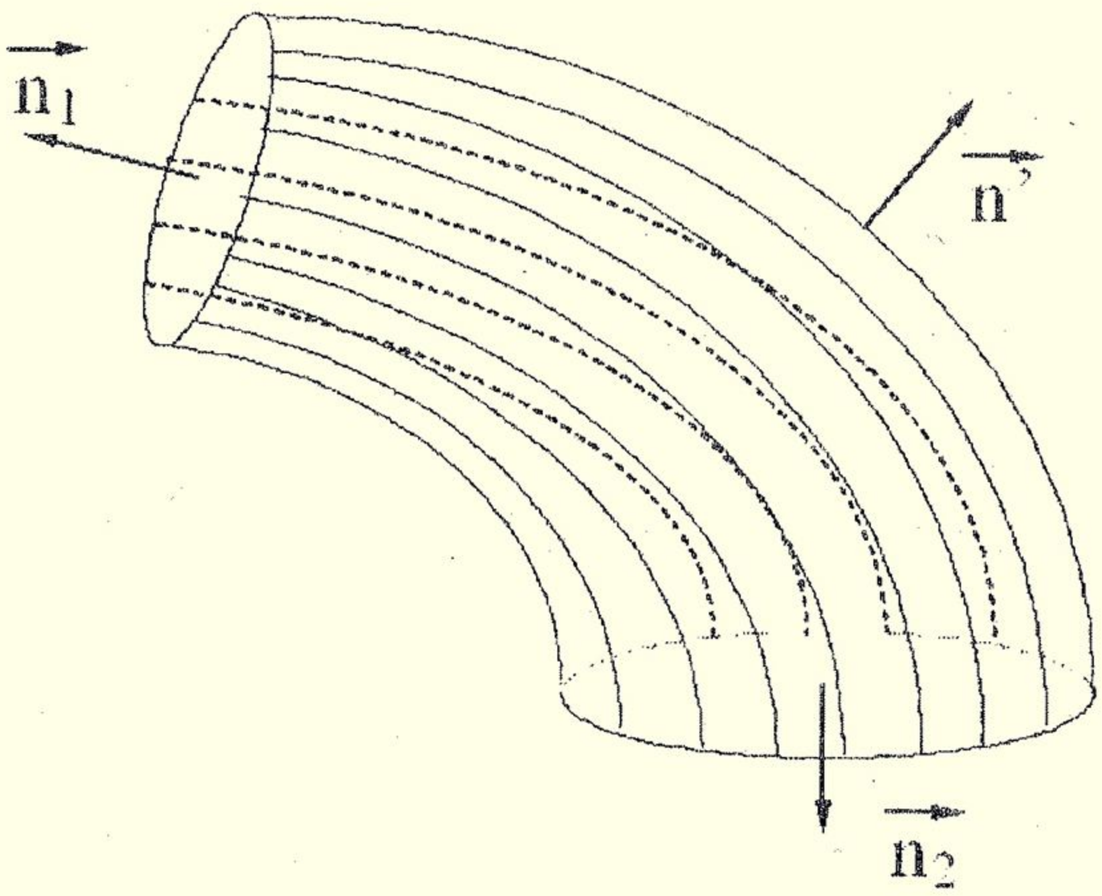


Figura 1.14: Linii de câmp şi tub de linii de câmp ce se sprijină pe conturul suprafeţei S.

lar pe suprafaţa echipotenţială. În plus, mai observăm că direcţia vectorului $\vec{E}$ este opusă celei a vectorului $gradV$. Deoarece vectorul $gradV$ este orientat în sensul creşterii potenţialului, vectorul $\vec{E}$ este orientat în sensul descreşterii potenţialului.

Fluxul vectorului $\vec{E}$ de-a lungul unui tub de linii de câmp

Un tub de linii de câmp electric este suprafaţa descrisă de ansamblul liniilor de câmp care se sprijină pe conturul unei suprafeţe oarecare S (Fig.1.14)

Considerăm un tub elementar de linii de câmp, limitat la ambele extremităţi de două suprafeţe elementare dS_1 şi dS_2 . În interiorul tubului nu se află nici o sarcină electrică,

$$Q = 0 \tag{1.72}$$

În acest caz, conform teoremei lui Gauss (1.39), fluxul câmpului electric prin întreaga suprafaţă a tubului elementar considerat este nul,

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \tag{1.73}$$

şi

$$\left(\vec{E}_1 \cdot \vec{n}_1\right) dS_1 + \left(\vec{E}_2 \cdot \vec{n}_2\right) dS_2 + \left(\vec{E}' \cdot \vec{n}'\right) dS' = 0 \tag{1.74}$$

Dar normala $\vec{n}'$ la suprafaţa laterală dS' a tubului este totdeauna perpendiculară pe direcţia câmpului $\vec{E}'$, şi normalele $\vec{n}_1$ şi $\vec{n}_2$ sunt dirijate spre exteriorul suprafeţelor, astfel încât formula precedentă exprimă faptul că fluxul care intră prin suprafaţa dS_1 iese în întregime prin suprafaţa dS_2. *Fluxul câmpului electric prin tubul de linii de câmp este conservativ*:

$$-\left(\vec{E}_1 \cdot \vec{n}_1\right) dS_1 = \left(\vec{E}_2 \cdot \vec{n}_2\right) dS_2 \tag{1.75}$$

Dacă suprafeţele terminale ale tubului sunt perpendiculare pe peretele acestuia, vectorii intensitate a câmpului electric pe aceste suprafeţe, $\vec{E}_1$ şi $\vec{E}_2$, vor forma cu versorii $\vec{n}_1$ şi $\vec{n}_2$ $0°$, respectiv $180°$ iar ecuaţia (1.75) capătă forma următoare:

$$E_1 dS_1 = E_2 dS_2 \tag{1.76}$$

Această ecuaţie exprimă o proprietate a câmpului electric, enunţată adesea fără o justificare matematică, şi anume aceea că, *un câmp electric este cu atât mai intens cu cât numărul de linii de câmp pe unitatea de suprafaţă este mai mare.* Într-adevăr, dacă suprafaţa dS_1 a tubului de linii de câmp este mai mică, $(dS_1 < dS_2)$, acest fapt antrenează o creştere a intensităţii câmpului E_1, $(\left|\vec{E}_1\right| > \left|\vec{E}_2\right|)$.

Există şi alte proprietăţi ale reprezentării câmpului electrostatic prin linii de câmp şi suprafeţe echipotenţiale pe care le vom evidenţia în secţiunile următoare.

Aplicaţii. Probleme

1. Fie q_1 şi q_2 doua sarcini electrice punctiforme de semne contrare. Din A porneşte o linie de câmp ce formează cu dreapta care uneşte sarcinile unghiul θ_1. a) Sa se calculeze unghiul θ_2 pe care îl va face aceasta linie de câmp cu dreapta AB în punctul B. b) Sub ce unghi minim $\theta_{1,0}$ pleaca din A o linie de câmp care nu ajunge în B? c) Ce unghi va face aceasta linie de câmp cu axa care uneşte sarcinile, la infinit?

2. Două sarcini punctiforme identice de mărime q se află la distanţa d. a) La ce distanţă minimă se va apropia linia de câmp, care formează la plecarea din sarcină q unghiul α cu dreapta care uneşte sarcinile, de planul perpendicular pe mijlocul segmentului care uneşte sarcinile. b) Calculaţi unghiul dintre linia de câmp şi dreapta care uneşte sarcinile, departe de sistemul de sarcini, în funcţie de α. c) Pentru puncte situate departe de sistem calculaţi intensitatea câmpului electric şi potenţialul.

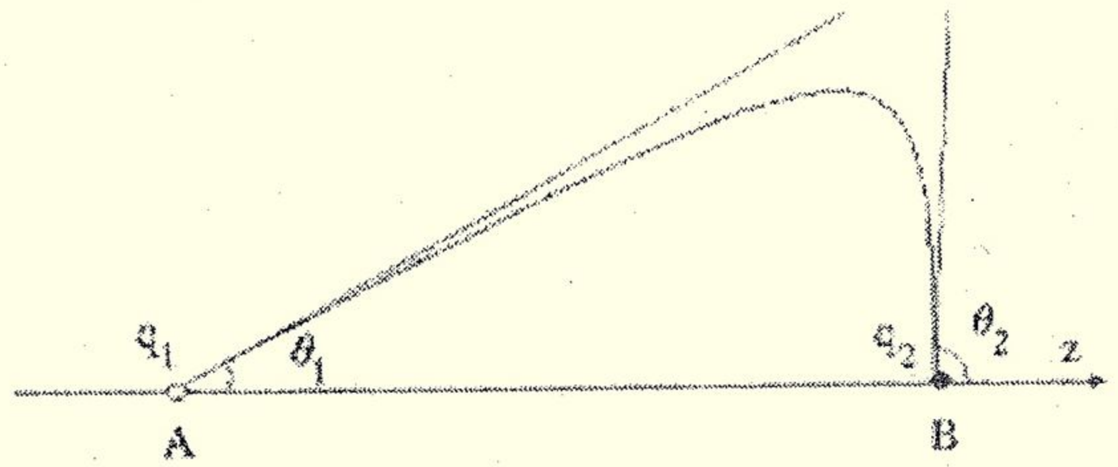


Figura 1.15: Figura la problema 1

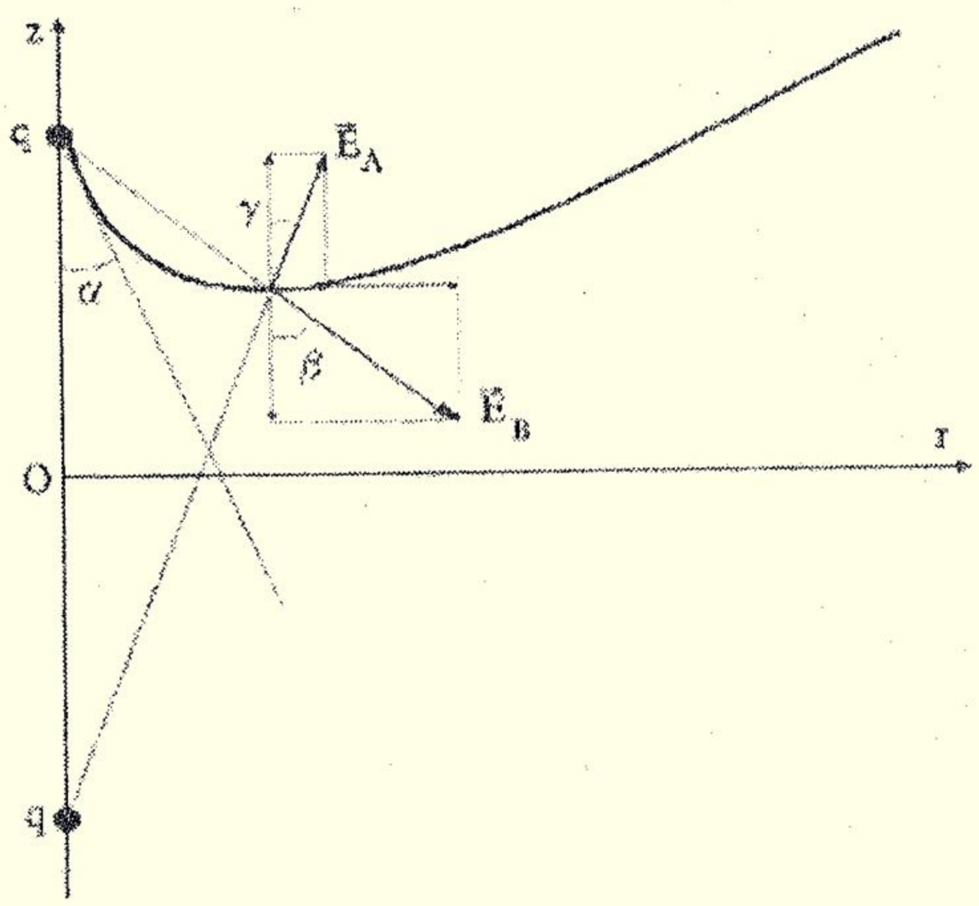


Figura 1.16: Figura la problema 2

Răspunsuri

1. a) $\cos\theta_2 = -\frac{q_1}{q_2}(1-\cos\theta_1) - 1$ b) $\cos\theta_{10} = 1 + 2\frac{q_2}{q_1}$ c) $\theta_\infty = 0$

2. a)

$$d_{min} = \frac{d}{2}\left(1 - 2\frac{\sin\gamma\cos\beta}{\sin(\beta+\gamma)}\right)$$

unde

$$\begin{cases} \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos\alpha - 1 + \sqrt{\frac{(3-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}{3}}\right] \\ \cos\gamma = \frac{1}{2}\left[1 - \cos\alpha + \sqrt{\frac{(3-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}{3}}\right] \end{cases}$$

b) $\cos\delta = \frac{1-\cos\alpha}{2}$ c) $V = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 R}$; $\vec{E} = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{R}}{R^3}$

1.10 Ecuaţiile locale şi integrale ale câmpului electrostatic

În paragrafele precedente au fost formulate legi fundamentale ale electrostaticii care, sub o formă matematică integrală, corelează câmpul şi potenţialul electric cu sursele acestuia, sarcini discrete sau cu distribuţii continue liniare, bidimensionale sau tridimensionale, caracterizate prin densitatea de sarcină. Aceste formule fundamentale au fost prezentate în cadrul unor teoreme generale ale electrostaticii. Le rezumăm aici luând în consideraţie numai cazul distribuţiilor volumice de sarcină care sunt singurele realiste din puct de vedere fizic (orice sarcina electrică ocupă un anumit volum fizic, chiar dacă acesta este foarte mic). În condiţiile trecerii la limită, când Δv se micşorează până ce atinge dimensiuni punctiforme (infinit mic din punct de vedere fizic), $(\Delta v \to 0)$, formulăm aceste legi sub o formă locală sau formă diferenţială care exprimă câmpul şi potenţialul electric în fiecare punct al spaţiului. Proprietăţile câmpului electrostatic se pot exprima matematic într-o formă succintă prin teorema lui Gauss şi cea a circulaţiei.

Teorema lui Gauss - forma integrală

Fluxul câmpului electric $\vec{E}$ printr-o suprafaţă închisă S este egal cu raportul dintre sarcina totală $Q = \int_v \rho dv$ distribuită în volumul v limitat de suprafaţa S, şi permitivitatea vidului ε_0.

$$\Phi = \int_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_v \rho dv \tag{1.77}$$

Teorema circulaţiei vectorului câmp electric - forma integrală

Circulaţia vectorului câmp electric $\vec{E}$ pe orice contur închis C este egală cu zero

$$\int_c \vec{E}\cdot\overrightarrow{dl} = 0. \tag{1.78}$$

O consecinţă directă a acestei proprietăţi este că circulaţia vectorului câmp electric între două puncte nu depinde de drumul pe care se realizează, ceea ce permite introducerea potenţialului electrostatic. *Circulaţia vectorului $\vec{E}$*

pe o porţiune de drum, între două puncte A şi B, este egală cu diferenţa de potenţial dintre aceste puncte:

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = V_A - V_B \tag{1.79}$$

Teorema lui Gauss - forma locală

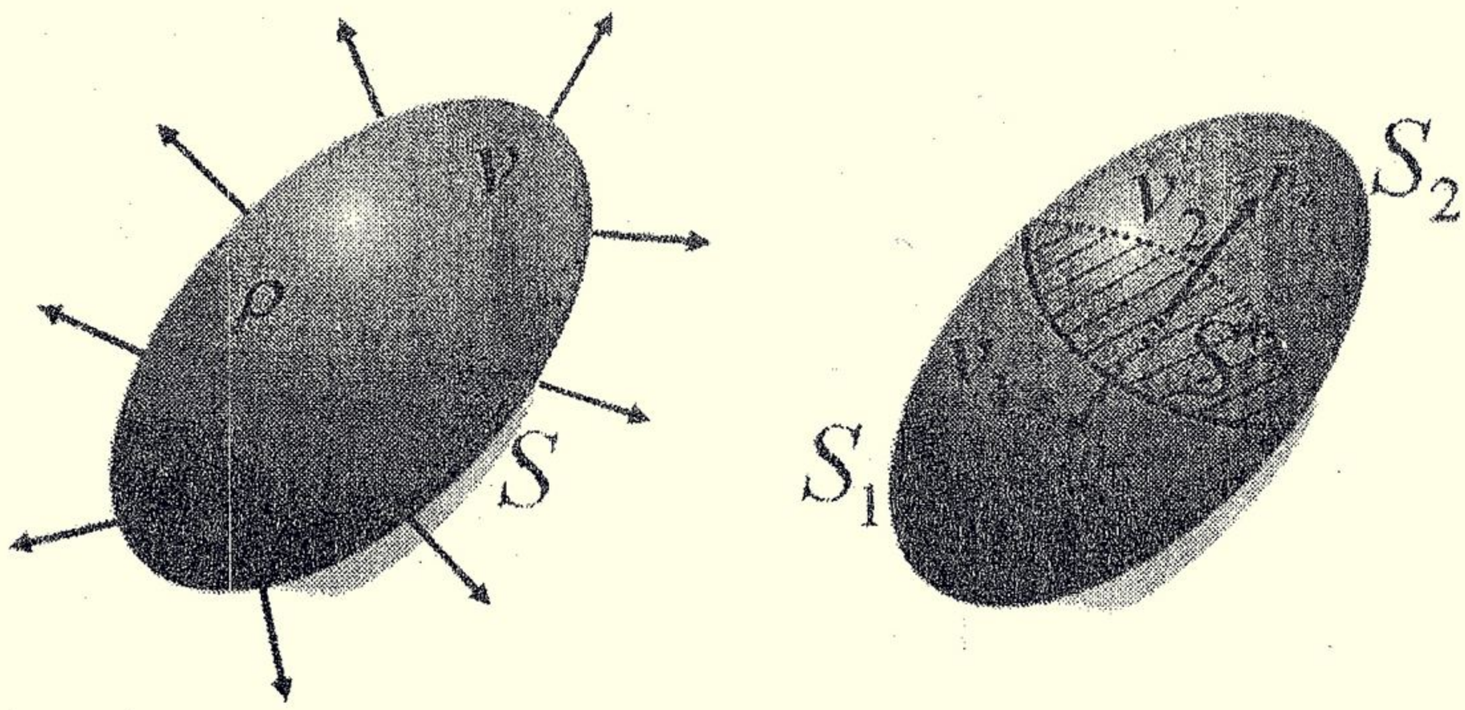
Urmărim să exprimăm fluxul câmpului electric $\vec{E}$ printr-o suprafaţă elementară închisă ΔS, în interiorul căreia se află o sarcină elementară ΔQ. Considerăm că volumul Δv limitat de suprafaţa ΔS este suficient de mic pentru ca sarcina să fie uniform distribuită, cu densitatea $\rho = (\Delta Q/\Delta v)$ constantă şi vom exprima fluxul câmpului electric în funcţie de densitatea volumică de sarcină. După ce vom trece la limită, făcând ca Δv, respectiv ΔS să tindă către zero, respectiv către *dimensiuni punctuale*, fluxul câmpului electric prin suprafaţa ΔS, "redusă la un punct" va avea semnificaţia unui câmp electric legat direct de sursa sa din acel punct. Se va obţine astfel o relaţie "locală" între $\vec{E}$ şi ρ sub forma unei ecuaţii diferenţiale. Pentru a deduce această ecuaţie, vom aplica o metodă de superpoziţie: Pentru aceasta, exprimăm mai întâi teorema lui Gauss pentru fluxul câmpului electric $\vec{E}$ prin suprafaţa S care conţine o sarcină electrică distribuită continuu cu densitatea volumică ρ în întregul volum v mărginit de S (Fig. 1.17(a)); apoi, vom diviza acecaşi suprafaţă în două părţi delimitate de o suprafaţă de contact. Acestea vor conţine volumele v_1 şi v_2 limitate de suprafeţele S_1 şi S_2 având o porţiune de suprafaţă S' comună (Fig. 1.17(b)); Scriind teorema lui Gauss pentru fiecare dintre aceste suprafeţe obţinem următoarea ecuaţie,

$$\int_S \vec{E}\cdot\overrightarrow{dS} = \int_{S_1} \vec{E}\cdot\overrightarrow{dS}_1 + \int_{S'} \left(\vec{E}\cdot\vec{n}_1\right) dS' + \int_{S_2} \vec{E}\cdot\overrightarrow{dS}_2 - \int_{S'} \left(\vec{E}\cdot\vec{n}_2\right) dS' \tag{1.80}$$

în care $\vec{n}_1$ şi $\vec{n}_2$ reprezintă normalele exterioare suprafeţelor S_1 şi S_2. Pe suprafaţa S' normalele sunt îndreptate în sensuri opuse astfel încît fluxurile prin suprafaţa S', interioară volumului v, se anulează.

Acum să generalizăm metoda precedentă, decupând volumul v într-un număr foarte mare N de volume elementare Δv_i care, însumate de la $i = 1$ la $i = N$, vor reconstitui întregul volum v. Fiecărui volum elementar Δv_i îi va corespunde suprafaţa elementară închisă ΔS_i. Fluxurile prin suprafeţele $\Delta S_i'$ interioare suprafeţei S se anulează în virtutea regulii stabilite anterior, astfel încât fluxul total va fi

$$\int_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Delta S_i} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS}_i \tag{1.81}$$



(a) Aplicarea teoremei lui Gauss în forma locală (b) Divizarea volumului

Figura 1.17: Teorema lui Gauss - forma locală

Urmează să considerăm această ecuaţie în condiţiile în care facem ca suprafeţele ΔS_i să tindă către zero, dar trebuie să ţinem seama de faptul că această diminuare a suprafeţelor antrenează concomitent o diminuare a volumelor Δv_i respectiv o diminuare a sarcinii închisc in aceste volume. Pentru a lua în consideraţie acest fapt vom scrie membrul al doilea al ecuaţiei (1.81) sub forma următoare, fără a antrena o alterare a acestei ecuaţii.

$$\sum_{i=1}^{N} \Delta v_i \frac{\int_{\Delta S_i} \vec{E} \cdot d\vec{S}_i}{\Delta v_i} \tag{1.82}$$

Făcînd ca numărul N să tindă către infinit, această sumă se transformă într-o integrală, volumele Δv_i devenind volume infinitezimle dv. Astfel, ecuaţia (1.81) se scrie sub forma următoare,

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_v div\vec{E} dv \tag{1.83}$$

In această ecuaţie, $div\vec{E}$ reprezintă operatorul scalar numit "*divergenţă*", a cărui semnificaţie fizică este accea a *limitei către care tinde raportul dintre fluxul cîmpului electric printr-o suprafaţă elementară şi volumul elementar închis în această suprafaţă, cînd volumul tinde către zero*:

$$div\vec{E} = \lim_{\Delta v_i \to 0} \frac{\int_{\Delta S_i} \vec{E} \cdot d\vec{S}_i}{\Delta v_i} \tag{1.84}$$

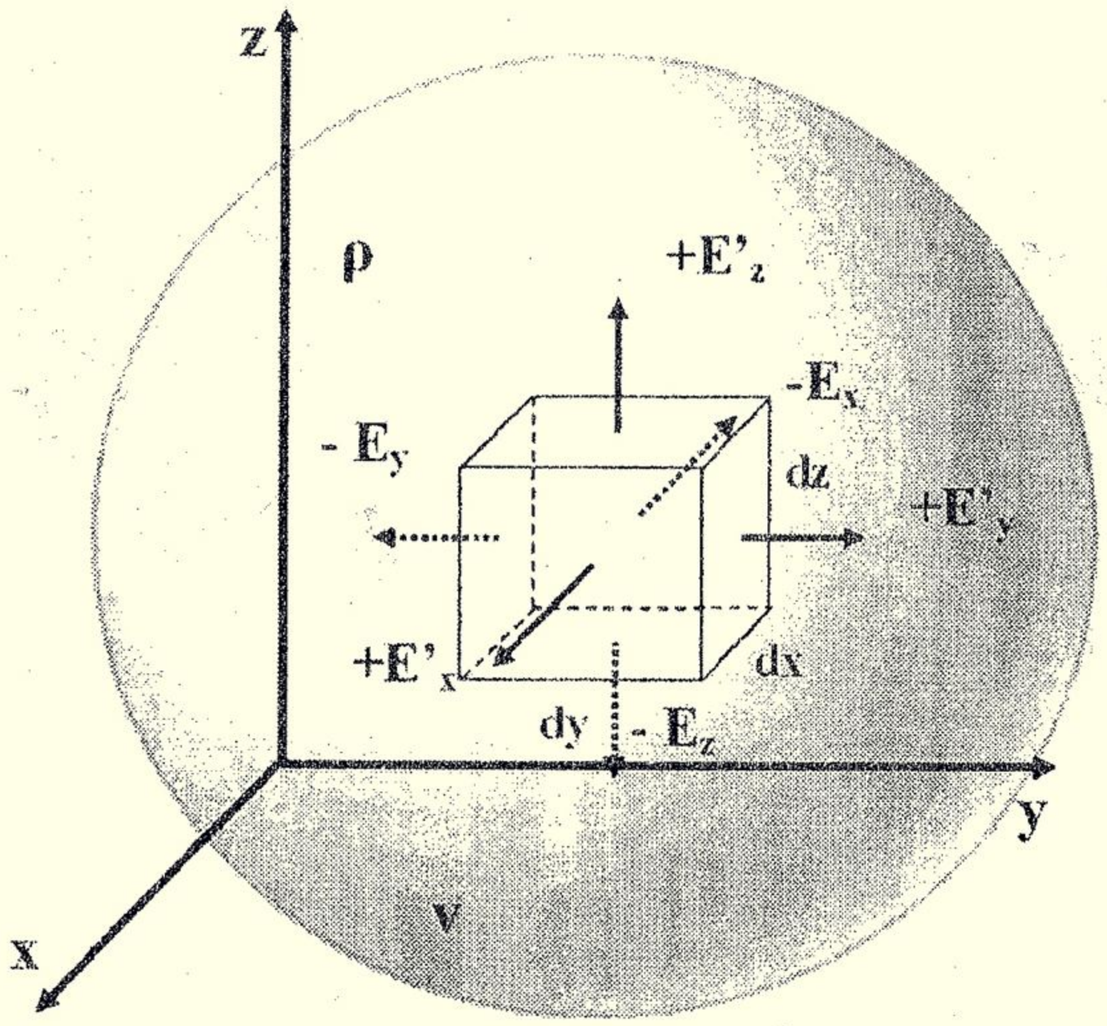


Figura 1.18: Calulul divergenţei în coordonate carteziene

Înlocuind în forma integrală a teoremei lui Gauss (1.77) relaţia dintre fluxul vectorului intensitate a câmpului electric $\vec{E}$ şi integrala de volum a divergenţei aceluiaşi vector (care se întâlneşte în matematică sub denumirea de relaţie a lui Green-Gauss-Ostrogradski) obţinem *ecuaţia câmpului electric sub forma diferenţială sau locală*

$$div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{1.85}$$

În cele ce urmează vom situa distribuţia volumică de sarcină într-un sistem de referinţă ortogonal (x, y, z) şi, pentru a stabili expresia carteziană a ecuaţiei (1.84), respectiv a divergenţei vectorului $\vec{E}$, vom considera un element de volum dv şi vom exprima fluxul câmpului electric al sarcinii conţinute în acest volum elementar, $dQ = \rho dv$, prin suprafaţa dS care conţine elementul de volum. Pentru simplitate vom considera un element de volum paralelipipedic, $dv = dxdydz$ (Fig. 1.18) şi vom suma fluxul prin fiecare element de suprafaţă elementară, ţinând cont de componentele vectorului $\vec{E}$ şi de variaţia acestora pe distanţele dx, dy, dz, precum şi de faptul că normalele la aceste suprafeţe sunt îndreptate către exterior. Astfel, fluxul prin suprafaţa $dydz$ va fi $-E_x dydz$, iar prin suprafaţa opusă, $+E'_x dydz$ în care E'_x

reprezintă valoarea componentei la distanţa dx şi poate fi exprimată în funcţie de E_x considerând o simplă dezvoltare Taylor în care vom reţine numai termenii de ordinul I ai dezvoltării:

$$E'_x = E_x + \frac{\partial E_x}{\partial x} dx + ... \tag{1.86}$$

Exprimând în aceeaşi manieră fluxurile prin suprafeţele $dxdz$ şi $dxdy$, expresia fluxului total prin suprafaţa dS capătă forma următoare

$$d\Phi = \vec{E} \cdot \vec{dS} = (-E_x + E'_x)\, dydz + \left(-E_y + E'_y\right) dxdz + (-E_z + E'_z)\, dxdy \tag{1.87}$$

sau, luând în consideraţie pentru componentele E'_y şi E'_z dezvoltări similare celei luate pentru componenta E'_x, şi exprimând fluxul prin întreaga suprafaţă S a distribuţiei volumice, obţinem în final:

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot \vec{dS} = \int_v \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) dxdydz \tag{1.88}$$

Din ecuaţiile (1.88) şi (1.83), se deduce imediat expresia în coordonate carteziene a divergenţei vectorului $\vec{E}$, cu semnificaţia fizică a acesteia exprimată în forma locală a ecuaţiei lui Gauss:

$$div\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{1.89}$$

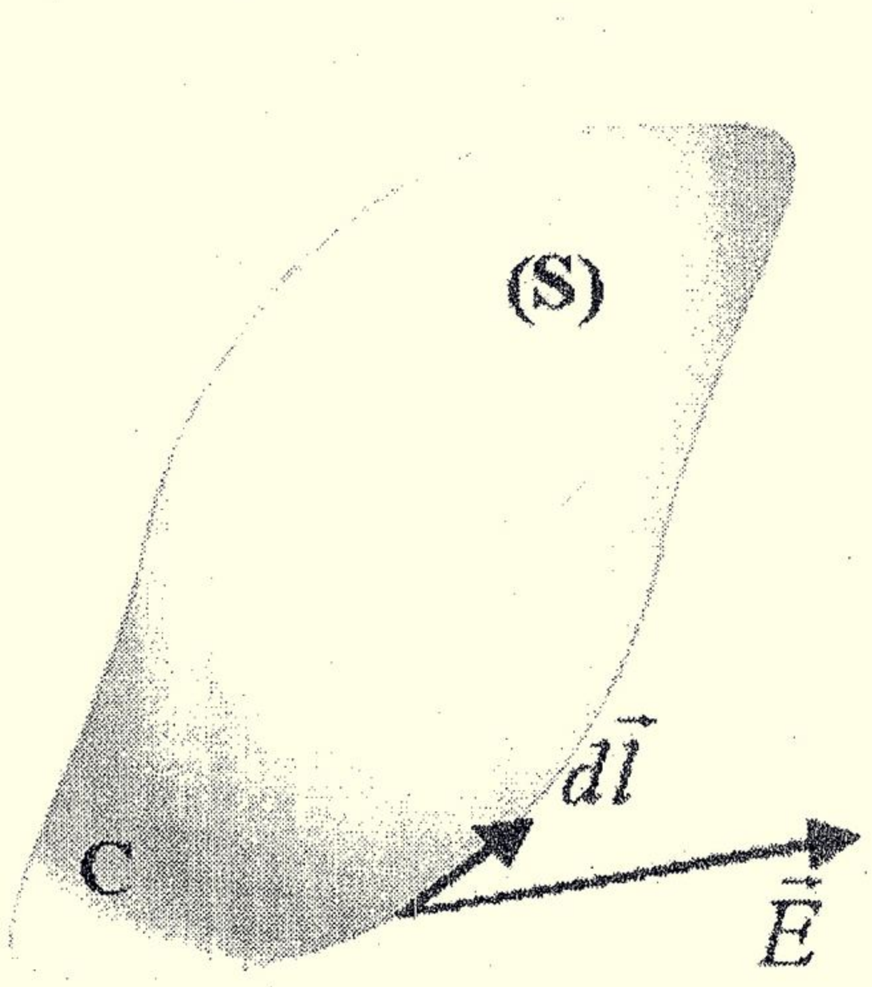
În finalul acestei secţiuni mai observăm că dacă într-un punct densitatea de sarcină este zero, $(\rho = 0)$, rezultă $div\vec{E} = 0$ ceea ce indică un câmp electric cu flux conservativ. Dacă în forma locală a ecuaţiei lui Gauss se multiplică $\vec{E}$ cu permitivitatea vidului, ε_0, mărimea vectorială care se obţine,

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} \tag{1.90}$$

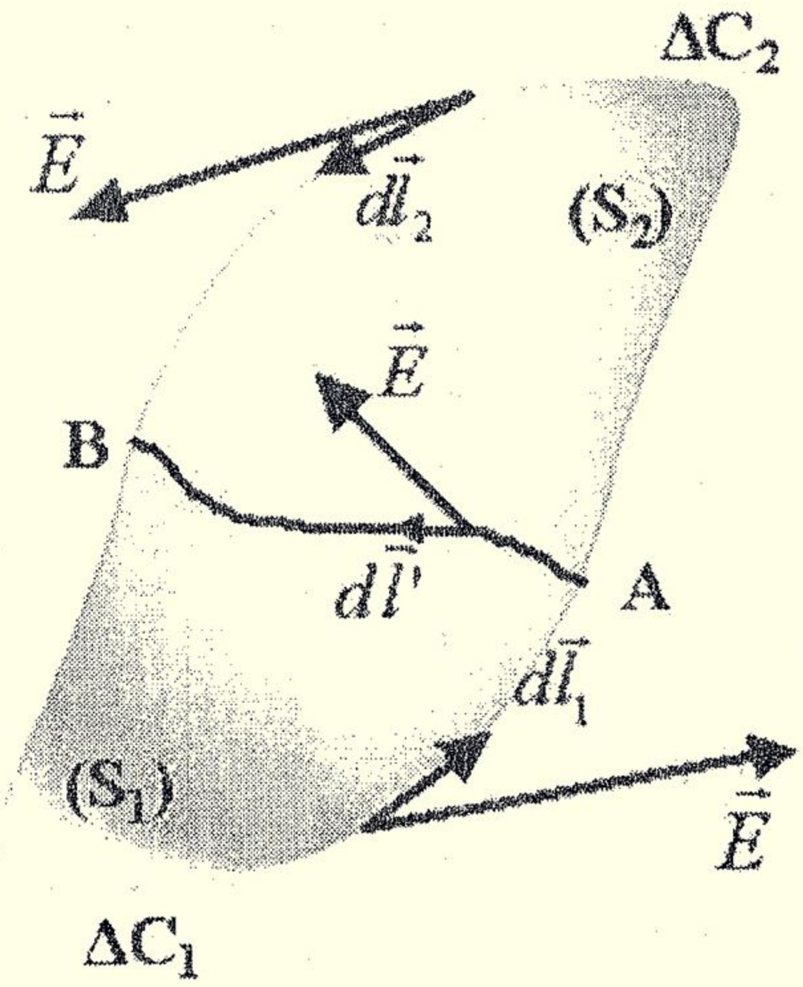
se numeşte *inducţie electrică* (în vid!), şi teorema lui Gauss în formă locală capătă forma:

$$div\vec{D} = \rho. \tag{1.91}$$

Vom vedea în capitolele următoare că, în cazul cîmpului electric în medii materiale, membrul drept al ecuaţiei conţine un termen care depinde de natura mediului.



(a) Aplicarea teoremei circulaţiei vectorului $\vec{E}$ pe conturul suprafeţelor elementare elementare



(b) Divizarea conturului de integrare

Figura 1.19: Teorema circulaţiei - forma locală

Teorema circulaţiei vectorului $\vec{E}$ - forma locală

Urmărim să exprimăm circulaţia vectorului câmp electric $\vec{E}$ pe un contur închis C în condiţiile în care suprafaţa ΔS limitată de contur tinde să se micşoreze până la zero, căpătând dimensiuni "punctuale". Această circulaţie infinitezimală va oferi o nouă expresie "locală " sau diferenţială pentru vectorul $\vec{E}$. Pentru a deduce această expresie, aplicăm metoda superpoziţiei într-un mod asemănător celui aplicat în cazul teoremei lui Gauss: Exprimăm mai întâi teorema circulaţiei câmpului electric $\vec{E}$ pe conturul C care limitează suprafaţa S (1.19(a)); apoi decupăm acest circuit în două, prezentând conturile exterioare ΔC_1 şi ΔC_2 despărţite printr-o linie comună AB, care delimitează suprafeţele S_1 şi S_2.

Exprimînd teorema circulaţiei pentru fiecare dintre aceste circuite obţinem ecuaţia următoare,

$$\int_C \vec{E}\cdot\overrightarrow{dl} = \int_{\Delta C_1} \vec{E}\cdot\overrightarrow{dl}_1 + \int_A^B \vec{E}\cdot\overrightarrow{dl'} + \int_{\Delta C_2} \vec{E}\cdot\overrightarrow{dl}_2 + \int_B^A \vec{E}\cdot\overrightarrow{dl'} \quad (1.92)$$

în care circulaţia pe porţiunea de drum comună este nulă, aceasta fiind efectuată în ambele sensuri. Generalizând această metodă, divizăm suprafaţa

limitată de conturul C într-un număr mare N de suprafeţe elementare ΔS_i care, însumatc de la $i = 1$ la $i = N$, vor reconstitui întreaga suprafaţă S. Fiecărei suprafeţe elementare ΔS_i situată la periferia suprafeţei S îi va corespunde o porţiune exterioară a conturului elementar ΔC_i completată de porţiunile interioare. Circulaţia pe porţiunile $\Delta l_i'$, interioare suprafeţei S, se anulează în virtutea regulii stabilite anterior, astfel încât circulaţia totală va fi

$$\int_c \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Delta C_i} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl}_i \tag{1.93}$$

Considerând această ecuaţie în condiţiile în care facem ca porţiunile de contur exterior ΔC_i să tindă către zero, vom ţine seama de faptul că această diminuare antrenează concomitent o diminuare a suprafeţelor ΔS_i. În acest caz membrul al doilea al ecuaţiei (1.93) rămâne neschimbat dacă va fi scris sub forma următoare:

$$\sum_{i=1}^{N} \Delta S_i \frac{\int_{\Delta C_i} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl}_i}{\Delta S_i} \tag{1.94}$$

La limită, numărul N tinde către infinit, şi această sumă se transformă într-o integrală, suprafeţele ΔS_i devenind suprafeţe infinitesimale dS, şi ecuaţia (1.93) capătă forma următoare:

$$\int_C \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} = \int_S \overrightarrow{rot}\vec{E} \cdot d\vec{S} \tag{1.95}$$

In această ecuaţie, $\overrightarrow{rot}\vec{E}$ reprezintă operatorul vectorial numit "*rotor* ", a cărui semnificaţie fizică este aceea a *limitei către care tinde raportul dintre circulaţia câmpului electric pe un contur elementar şi suprafaţa elementară limitată de acest contur, când acestă suprafaţă tinde către zero*:

$$\overrightarrow{rot}\vec{E} = \lim_{\Delta S_i \to 0} \frac{\int_{\Delta C_i} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl}_i}{\Delta S_i} \tag{1.96}$$

Exoresia (1.95) este cunoscută sub numele de teorema lui Stokes potrivit căreia o integrală curbilinie poate fi transformată într-o integrală de suprafaţă. Semnificaţia fizică a acestei relaţii constă în faptul că lucrul efectuat de forţele electrostatice pentru a deplasa sarcina electrică unitară pe un contur C închis este egal cu fluxul vectorului $\overrightarrow{rot}\vec{E}$ printr-o suprafaţa S oarecare care se sprijină pe conturul C. În virtutea ecuaţiilor (1.78) care exprimă teorema

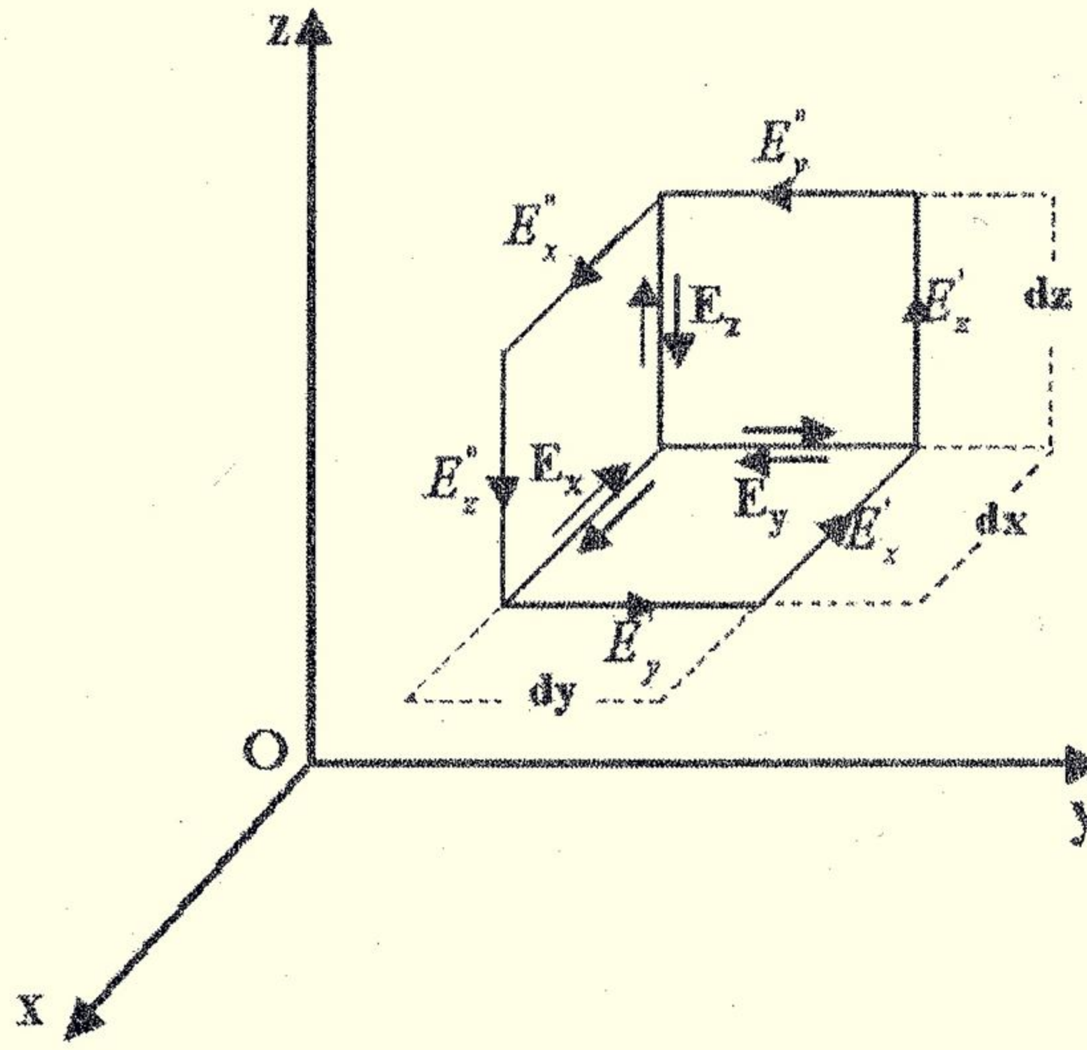


Figura 1.20: Aplicarea teoremei circulaţiei vectorului câmp electric pe un contur infinitezimal

circulaţiei vectorului $\vec{E}$ pe un contur închis, ecuaţia (1.95), ne oferă astfel o altă *proprietate a câmpului electrostatic sub forma diferenţială sau locală*

$$\overrightarrow{rot}\vec{E} = 0 \tag{1.97}$$

(*câmpul electrostatic este un câmp irotaţional*). Deoarece rotorul unui gradient este întotdeauna zero, putem trage concluzia că, din proprietatea (1.97) rezultă relaţia dintre câmpul şi potenţialul electric, $\vec{E} = -gradV$.

Ca şi în cazul operatorului diferenţial divergenţă, vom stabili expresia carteziană a rotorului vectorului $\vec{E}$. Pentru acesta vom situa conturul C într-un sistem de referinţă ortogonal (x, y, z). Pentru simplitatea calculului vom considera o suprafaţă alcătuită din trei suprafeţe elementare ortogonale $dydz$, $dzdx$ şi $dxdy$ aflate în contact, (1.20), şi vom exprima circulaţia vectorului $\vec{E}$ pe fiecare element de drum din conturul exterior acestei suprafeţe, ţinând seama de faptul că circulaţia pe porţiunile de drum interioare conturului se anulează deorece ea este efectuată în ambele sensuri pe aceste porţiuni, şi în acelaşi timp luând în consideraţie variaţiile componentelor câmpului, E_x, E_y şi E_z la distanţele $x + dx$, $y + dy$ şi $z + dz$, respectiv,

$$E'_y = E_y + \frac{\partial E_y}{\partial x}ax \qquad E'_x = E_x + \frac{\partial E_x}{\partial y}dy$$
$$E'_z = E_z + \frac{\partial E_z}{\partial y}dy \qquad E''_z = E_z + \frac{\partial E_z}{\partial x}dx \tag{1.98}$$
$$E''_y = E_y + \frac{\partial E_y}{\partial z}dz \qquad E''_x = E_x + \frac{\partial E_x}{\partial z}dz$$

Circulaţia elementară a vectorului $\vec{E}$ pe întregul contur este dată de următoarea expresie în care se ţine seama de sensul de circulaţie în raport cu sensul pozitiv al axelor de referinţă:

$$\vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} = E'_y dy - E'_x dx + E'_z dz - E''_y dy + E''_x dx - E''_z dz \tag{1.99}$$

După înlocuirea componentelor câmpului cu expresiile lor din (1.98), ecuaţia (1.99) capătă forma următoare:

$$\vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) dxdz + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) dxdy \tag{1.100}$$

Ţinând seama de sensul de orientare al versorilor suprafeţelor elementare dS, vom obţine pentru expresia circulaţiei elementare pentru un contur oarecare C, reprezentat în spaţiul tridimensional de axe x, y, z, următoarea expresie:

$$\int_C \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} = \int_S \overrightarrow{rot}\vec{E} \cdot \overrightarrow{dS}$$

în care s-a notat

$$\overrightarrow{rot}\vec{E} = \vec{i}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) \tag{1.101}$$

sau exprimat ca un determinant,

$$\overrightarrow{rot}\vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} \tag{1.102}$$

(Deşi operatorul *rot* este vectorial, putem face convenţia de a-l nota simplifica , fără a marca simbolul vector.)

In consecinţă forma carteziană a rotaţionalului oferă posibilitatea de a determina componentele vectorului $\vec{E}$ într-un punct oarecare din spaţiul tridimensional, în acord cu teorema circulaţiei sub forma locală (sau diferenţială) $rot\vec{E} = 0$, prin trei ecuaţii corespunzătoare anulării fiecărei componente a vectorului $rot\,\vec{E}$ din expresia (1.101).

1.11 Ecuaţiile locale pentru potenţialului electric

Sunt deja cunoscute expresia câmpului electric sub forma locală dată de, $div\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$ şi relaţia dintre câmpul electric şi potenţial, $\vec{E} = -gradV$. Pornind de la acestea se deduce imediat că

$$div\,(-gradV) = -\Delta V = \rho/\varepsilon_0 \tag{1.103}$$

sau

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{1.104}$$

unde ΔV reprezintă Laplaceanul funcţiei potenţial iar expresia sa în coordonate carteziene este

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \tag{1.105}$$

Expresia (1.104), numită *ecuaţia lui Poisson pentru potenţial*, este o ecuaţie locală pentru potenţialul electric V. Importanţa sa constă în faptul că ea exprimă o legătură între potenţialul electric şi sursele sale. Dacă aceste surse sunt efectiv distribuţii volumice reale de sarcină de densitate ρ formula (1.104) se verifică în orice punct al distribuţiei. Dacă însă sursele sunt distribuţii de sarcini discrete, sau distribuţii lineare sau superficiale, ρ apare ca o *densitate volumică singulară*. Pentru a înţelege această noţiune de densitate volumică singulară să considerăm o sarcină electrică punctiformă Q şi să scriem pentru acest caz ecuaţia (1.104) în care V va fi considerat evident ca potenţialul electric al unei sarcini punctiforme:

$$div\vec{E} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} divgrad\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\Delta\left(\frac{1}{R}\right) \tag{1.106}$$

Calculând $\Delta\left(\frac{1}{R}\right)$ în coordonate sferice constatăm că această expresie este pretutindeni nulă cu excepţia cazului $R = 0$. Prin urmare sursa potenţialului, sarcina Q, este poziţionată în originea sistemului de axe şi, introducând acest rezultat în ecuaţia Poisson obţinem:

$$\rho = -\frac{Q}{4\pi}\Delta\left(\frac{1}{R}\right) \tag{1.107}$$

care poate fi exprimată cu ajutorul distribuţiei δ *a lui Dirac*, care prezintă o importanţă deosebită sub aspect teoretic. Această relaţie exprimă

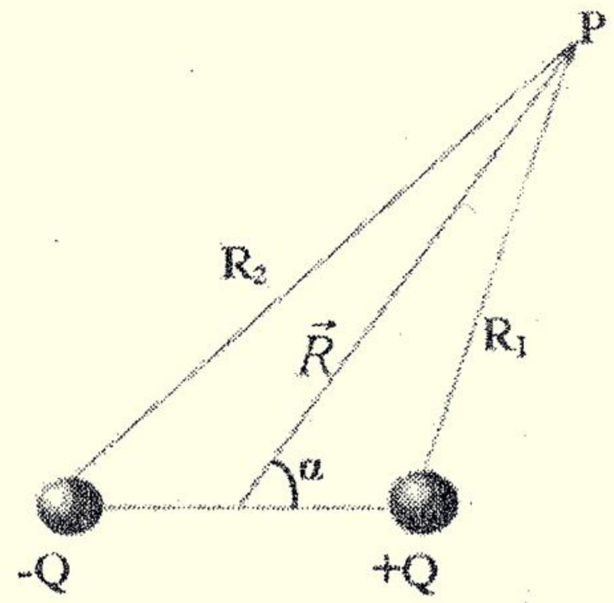


Figura 1.21: Dipolul electric

faptul că sarcina punctiformă poate fi considerată ca o distribuţie volumică de sarcină cu proprietăţi speciale: ea nu este o distribuţie continuă obişnuită deoarece sarcina este localizată într-un punct.

În cazul în care nu există sarcină electrică, ecuaţia (1.104) capătă forma următoare,

$$\Delta V = 0 \tag{1.108}$$

cunoscută sub numele de **ecuaţia lui Laplace**.

1.12 Câmpul şi potenţialul unui dipol electric

Un dipol electric este un sistem de două sarcini egale şi de semn contrar, $+Q$ şi $-Q$, situate la o distanţă d dată. Pentru a determina câmpul electric al dipolului într-un punct oarecare P, situat la distanţa $\vec{R}$ de centrul dipolului O şi făcând un unghi θ cu axa acestuia, (Fig. 1.21), este mai simplu să calculăm întâi potenţialul dipolului în acel punct şi apoi, utilizând relaţia generală dintre câmp şi potenţial, $\vec{E} = -gradV$, sau $dV = -\vec{E} \cdot \overrightarrow{dl}$, să determinăm componentele câmpului în sistemul de referinţă ales. Având în vedere simetria de revoluţie a sistemului în raport cu axa dipolului, vom lucra în coordonate polare. În acest caz, aceste componente vectorului sunt E_R şi E_θ, iar componentele vectorului $\overrightarrow{dl}$ sunt dR şi $Rd\theta$.

Potenţialul dipolului electric.

În virtutea legii de aditivitate a potenţialelor, potenţialul electric al dipolului în punctul $P(R, \theta)$ este egal cu suma potenţialelor sarcinilor $+Q$ şi

$-Q$ în acel punct:

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \tag{1.109}$$

Vom considera că R este mult mai mare decât d , astfel încât, pentru un observator situat la distanţa R , dipolul apare ca fiind foarte mic. Să-l numim *dipol punctiform*. În acest caz, în primă aproximaţie $R_2 - R_1 \cong d\cos\theta$, şi $R_1 R_2 \cong R^2$, şi astfel expresia (1.109) capătă forma simplificată:

$$V = \frac{Qd}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\theta}{R^2} \tag{1.110}$$

în care produsul Qd este o mărime caracteristică pentru un dipol dat. Dacă asociem acestei mărimi un vector unitar pentru a defini un sens al direcţiei d, anume de la sarcina negativă $-Q$ către sarcina pozitivă $+Q$, această mărime vectorială o vom nota cu simbolul $\vec{p}$ şi va fi numită *moment electric al dipolului*,

$$\vec{p} = Qd\vec{u} \qquad sau \qquad \vec{p} = Q\vec{d} \tag{1.111}$$

$\vec{u}$ fiind versorul distanţei d. Este evident că, dacă facem ca d să tindă către zero, menţinerea produsului Qd constant ar condiţiona o creştere a sarcinii până la infinit. Sensul denumirii de dipol punctiform se justifică prin aceea că, la limită, acesta se comportă ca o sursă de câmp punctiformă. Cu această noţiune de moment electric al dipolului, expresia potenţialului dipolului poate fi scrisă, fie sub forma scalară,

$$V = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\theta}{R^2} \tag{1.112}$$

fie sub o formă vectorială, implicând produsul scalar al vectorilor $\vec{p}$ şi $\vec{R}$:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{R}}{R^3}. \tag{1.113}$$

Câmpul electric al dipolului. Componentele câmpului electric al dipolului, în coordonate polare, respectiv E_R şi E_θ, sunt:

$$E_R = -\frac{\partial V}{\partial R} = \frac{p}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\theta}{R^3} \tag{1.114}$$

$$E_\theta = \frac{1}{R}\frac{\partial V}{\partial\theta} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sin\theta}{R^3} \tag{1.115}$$

Distingem două poziţii particulare, numite *poziţiile lui Gauss*: Poziţia I-a corespunzând unghiului $\theta = 0$ şi poziţia a II-a corespunzând unghiului $\theta = \pi/2$. În aceste poziţii, expresiile componentelor E_R şi E_θ sunt:

$$E_I = E_R = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{p}{R^3} \qquad \text{şi} \qquad E_{II} = E_\theta = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{R^3} \tag{1.116}$$

Observaţii: Intensitatea câmpului electric al dipolului punctiform variază invers proporţional cu puterea a treia a distanţei. Observăm şi faptul că modulul componentei radiale E_R a câmpului total în poziţia I a lui Gauss este de două ori mai mare decât cel al componentei tangenţiale E_θ în cea de a doua poziţie a lui Gauss.

Liniile de câmp şi suprafeţele echipotenţiale

Ecuaţia liniilor de câmp electric

Ecuaţia (1.67) liniilor de câmp capătă forma următoare în coordonate polare:

$$\frac{dR}{E_R} = \frac{Rd\theta}{E_\theta} \tag{1.117}$$

sau, ţinând cont de (1.114) şi (1.115)

$$\frac{2\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{dR}{R}. \tag{1.118}$$

După integrare se obţine *ecuaţia liniilor de câmp ale dipolului electric punctiform*:

$$R = K\sin^2\theta \tag{1.119}$$

încare K reprezintă o constantă arbitrară de integrare.

Ecuaţia suprafeţelor echipotenţiale ale dipolului

Ecuaţia suprafeţelor echipotenţiale, particularizată pentru cazul dipolului, poate fi scrisă în forma următoare, ţinând cont de expresia potenţialului dipolului punctiform formulată în (1.112):

$$R^2 = K'\cos\theta \tag{1.120}$$

unde K' este o constantă de integrare.

Figura 1.22 dă spectrul liniilor de câmp şi suprafeţele echipotenţiale ale dipolului electric, calculabile pe baza relaţiilor (1.119) şi (1.120).

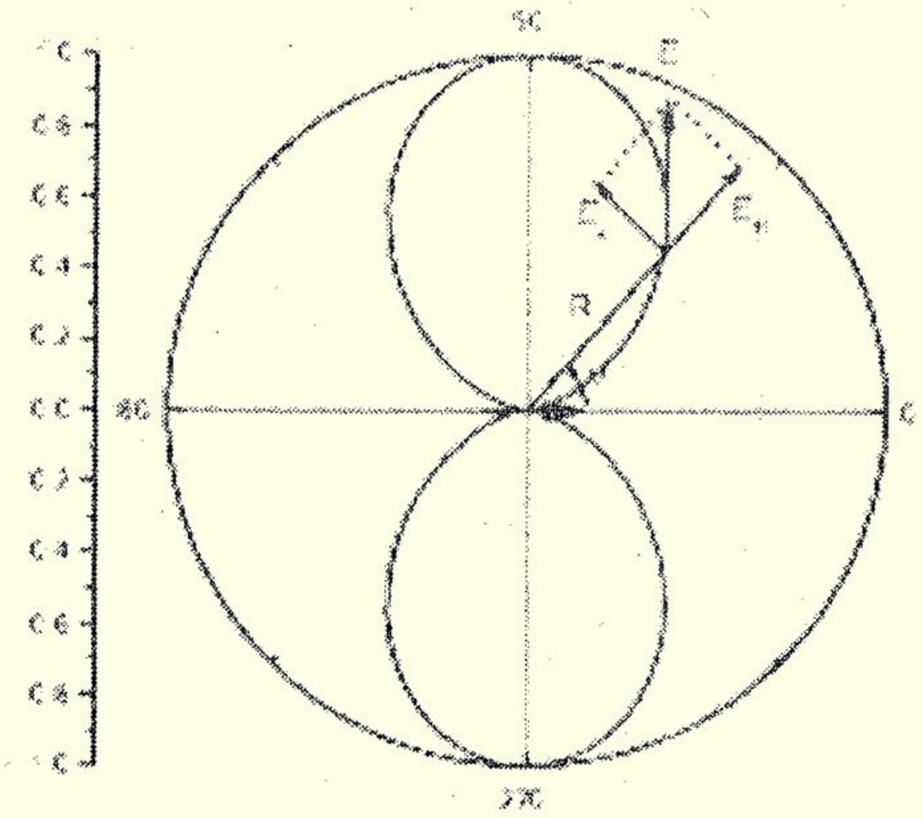


Figura 1.22: Topografia liniilor de câmp şi a suprafeţelor echipotenţiale ale dipolului electric punctiform

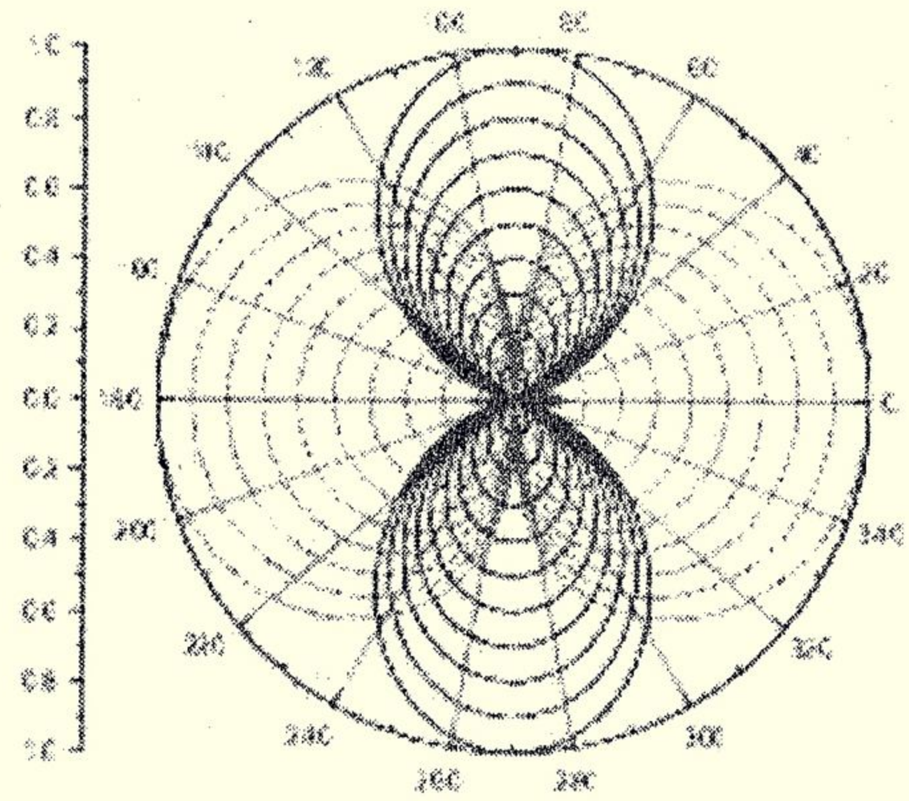


Figura 1.23: Topografia liniilor de câmp şi a suprafeţelor echipotenţiale ale dipolului electric punctiform

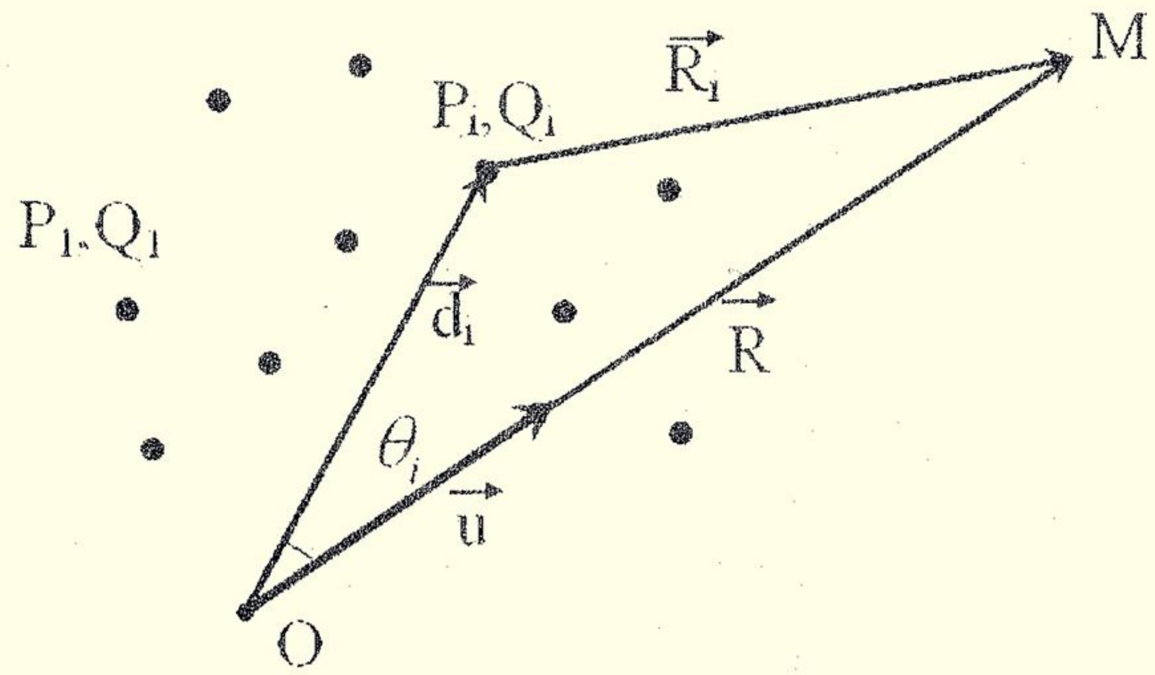


Figura 1.24: Câmpul unui sistem de sarcini

1.13 Câmpul şi potenţialul produs la mare distanţă de un sistem de sarcini

Considerăm N sarcini Q_i în punctele P_i şi un punct de origine O oarecare situat în domeniul ocupat de aceste sarcini. (Fig. 1.24).

În virtutea legii de aditivitate, potenţialul lor într-un punct M la distanţa $\overline{OM} = R$ este

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \frac{Q_i}{R_i} \tag{1.121}$$

cu

$$P_i M = R_i \tag{1.122}$$

Dar deoarece

$$R_i^2 = R^2 - 2d_i R\cos\theta_i + d_i^2 \tag{1.123}$$

unde

$$d_i = \overline{OP}_i \tag{1.124}$$

şi

$$\theta_i = \angle\left(\overline{OP_i}, \overline{OM}\right) \tag{1.125}$$

avem următoarea relaţie:

$$\frac{1}{R_i} = \frac{1}{R}\left(1 - 2\frac{d_i}{R}\cos\theta_i + \frac{d_i^2}{R^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{1.126}$$

Considerând că punctul M este la distanţă mare faţă de orice sarcină, deci $d_i << R_i$, factorul exponenţial din expresia (1.126) poate fi dezvoltat în serie de puteri crescătoare ale raportului d_i/R şi expresia capătă forma următoare:

$$\frac{1}{R_i} = \frac{1}{R} + \frac{d_i}{R^2}\cos\theta_i + \frac{d_i^2}{2R^3}\left(3\cos^2\theta_i - 1\right) + \cdots \tag{1.127}$$

În final expresia potenţialului sistemului de N sarcini Q_i este

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sum Q_i}{R} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sum Q_i d_i\cos\theta_i}{R^2} + \frac{1}{8\pi\varepsilon\epsilon_0}\frac{\sum Q_i d_i^2\left(3\cos^2\theta_i - 1\right)}{R^3} + \cdots \tag{1.128}$$

Distingem următoarele cazuri:

1) *Sarcina totală este diferită de zero*, $\sum Q_i \neq 0$:

Distribuţia este polarizată după cum este predominantă sarcina (+) sau (−) şi, în acest caz ea se numeşte distribuţie polară. Este evident că în expresia (1.128) a potenţialului întregii distribuţii va fi dominant termenul în $1/R$, acesta reprezentând partea principală a potenţialului

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sum Q_i}{R} \tag{1.129}$$

Contribuţia celui de al doilea termen din (1.128) va fi nulă dacă este satisfăcută condiţia

$$\sum Q_i d_i\cos\theta_i = 0 \tag{1.130}$$

sau, altfel formulat,

$$\sum Q_i\vec{d}_i\cdot\vec{u} = 0. \tag{1.131}$$

2) *Sarcina totală este nulă*, $\sum Q_i = 0$, dar $\sum Q_i\vec{d}_i\cdot\vec{u} \neq 0$: Aceasta este o *distribuţie dipolară*. Expresia (1.128) se reduce numai la termenul

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sum Q_i d_i\cos\theta_i}{R^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\left(\sum Q_i\vec{d}_i\right)\cdot\vec{u}}{R^2} \tag{1.132}$$

Este evident că sarcinile nu intervin decât prin intermediul vectorului moment electric al sistemului. Ţinând seama de (1.109), în care $Q_i\vec{d}_i = \vec{p}_i$, şi notând momentul electric al sistemului cu $\sum\vec{p}_i = \vec{p}$, expresia potenţialului V capătă forma următoare,

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{u}}{R^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p\cos\theta}{R^2} \tag{1.133}$$

care reprezintă efectiv potenţialul dipolului electric de moment $\vec{p}$. De remarcat faptul că vectorul $\vec{p}$ este independent de poziţia punctului O. Într-adevăr, pentru oricare altă origine O' avem

$$\vec{p'} = \sum Q_i \overrightarrow{O'P_i} = \sum Q_i \left(\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP_i}\right) = \overrightarrow{O'O} \sum Q_i + \sum Q_i \overrightarrow{OP_i} = \vec{p} \tag{1.134}$$

(sarcina totală fiind nulă, $\sum Q_i = 0$)

3. *Sarcina totală este nulă* $\sum Q_i = 0$ *şi totodată* $\sum Q_i \vec{d}_i = 0$:
Acesta este cazul *distribuţiilor multipolare*. In acest caz, primii doi termeni ai dezvoltării (1.128) sunt nuli. Al treilea termen este diferit de zero şi potenţialul corespunde unei distribuţii cuadripolare. În toate cazurile câmpul electric se calculează utilizând relaţia $\vec{E} = -gradV$.

1.14 Câmpul şi potenţialul distribuţiilor sferice de sarcină.

1) *Distribuţie sferică superficială de rază* a *şi de densitate* $\sigma = Q/(4\pi a^2)$
Deoarece sistemul de sarcini are o simetric sferică, (Fig. 1.25), este mai simplu să se aplice întâi teorema lui Gauss pentru a calcula câmpul electric în interiorul şi în exteriorul sferei de rază a şi apoi să se calculeze potenţialul, utilizând relaţia cunoscută dintre câmp şi potenţial:

Câmpul electric în interiorul sferei. Teorema lui Gauss pentru orice suprafaţă sferică de rază $R < a$ se scrie:

$$\int \vec{E}_{int} \cdot \overrightarrow{dS} = 4\pi R^2 E_{int} = 0 \tag{1.135}$$

sarcina fiind nulă în interiorul acestor suprafeţe sferice, rezultă că

$$E_{int} = 0 \tag{1.136}$$

Câmpul electric în exteriorul distribuţiei superficiale sferice: Aplicarea teoremei lui Gauss pentru orice suprafaţă de rază $R > a$, dă

$$\int \vec{E}_{ext} \cdot \overrightarrow{dS} = 4\pi R^2 E_{ext} = Q/\varepsilon_0 = 4\pi a^2 \sigma \tag{1.137}$$

respectiv

$$E_{ext} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{a^2}{R^2} \tag{1.138}$$

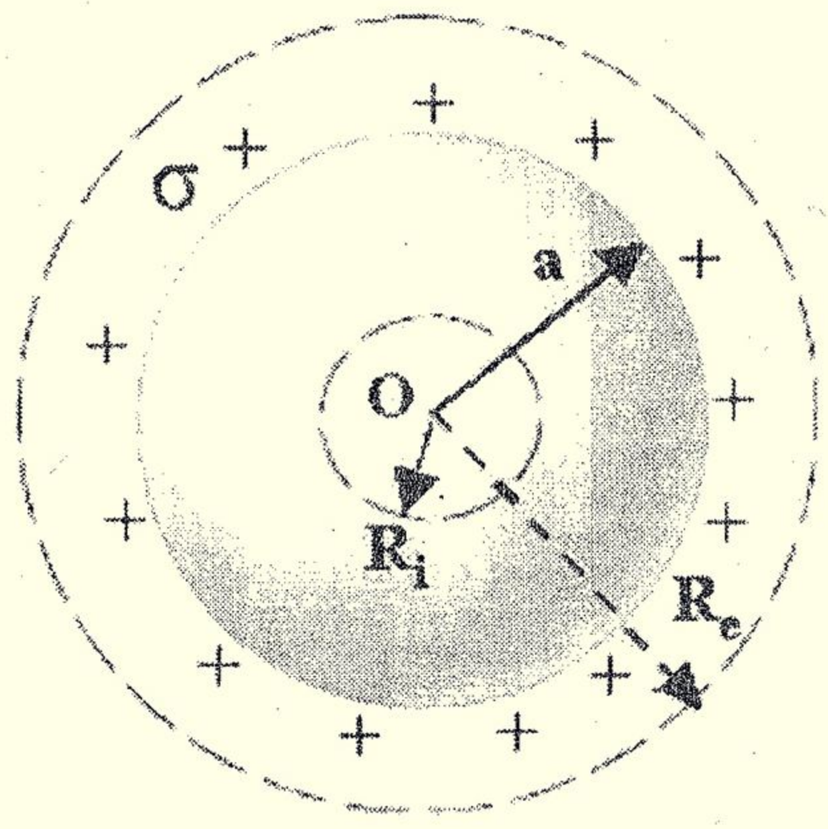


Figura 1.25: Distribuţie superficială sferică de sarcină

sau vectorial,

$$\vec{E}_{ext} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}\frac{\vec{R}}{R}. \tag{1.139}$$

Menţionăm că fluxul prin suprafeţele sferice concentrice cu distribuţia de sarcină se pot calcula făcând direct produsul dintre suprafaţa sferei prin care se calculează fluxul şi componenta radială a câmpului electric la nivelul suprafeţei (singura componentă nenulă) datorită simetriei sferice a câmpului creat de distribuţia de sarcină. Simetria câmpului este sferică întotdeauna când sarcinile electrice care produc acest câmp au o asemenea simetrie.

Potenţialul electric în interiorul sferei de rază a: Utilizând relaţia $dV_{int} = -\vec{E}_{int}\cdot\overrightarrow{dR}$ şi, ţinînd cont de (1.136), obţinem $dV_{int} = 0$, sau $V_{int} = A$.

Potenţialul electric în exteriorul distribuţiei sferice: Utilizând relaţia $dV_{ext} = -\vec{E}_{ext}\cdot\overrightarrow{dR}$ şi, ţinînd cont de (1.138), obţinem $V_{ext} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R} + B$. Constantele A şi B pot fi determinate dacă luăm în consideraţie următoarele două condiţii la limită: pentru $R \to \infty$ potenţialul exterior este nul, $V_{ext} = 0$ şi $B = 0$, pentru $R = a$, în virtutea proprietăţii de continuitate a potenţialului la traversarea suprafeţei distribuţiei superficiale, avem $V_{int} = V_{ext}$. În consecinţă, potenţialele în interior şi în exterior sunt:

$$V_{int} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{a} \tag{1.140}$$

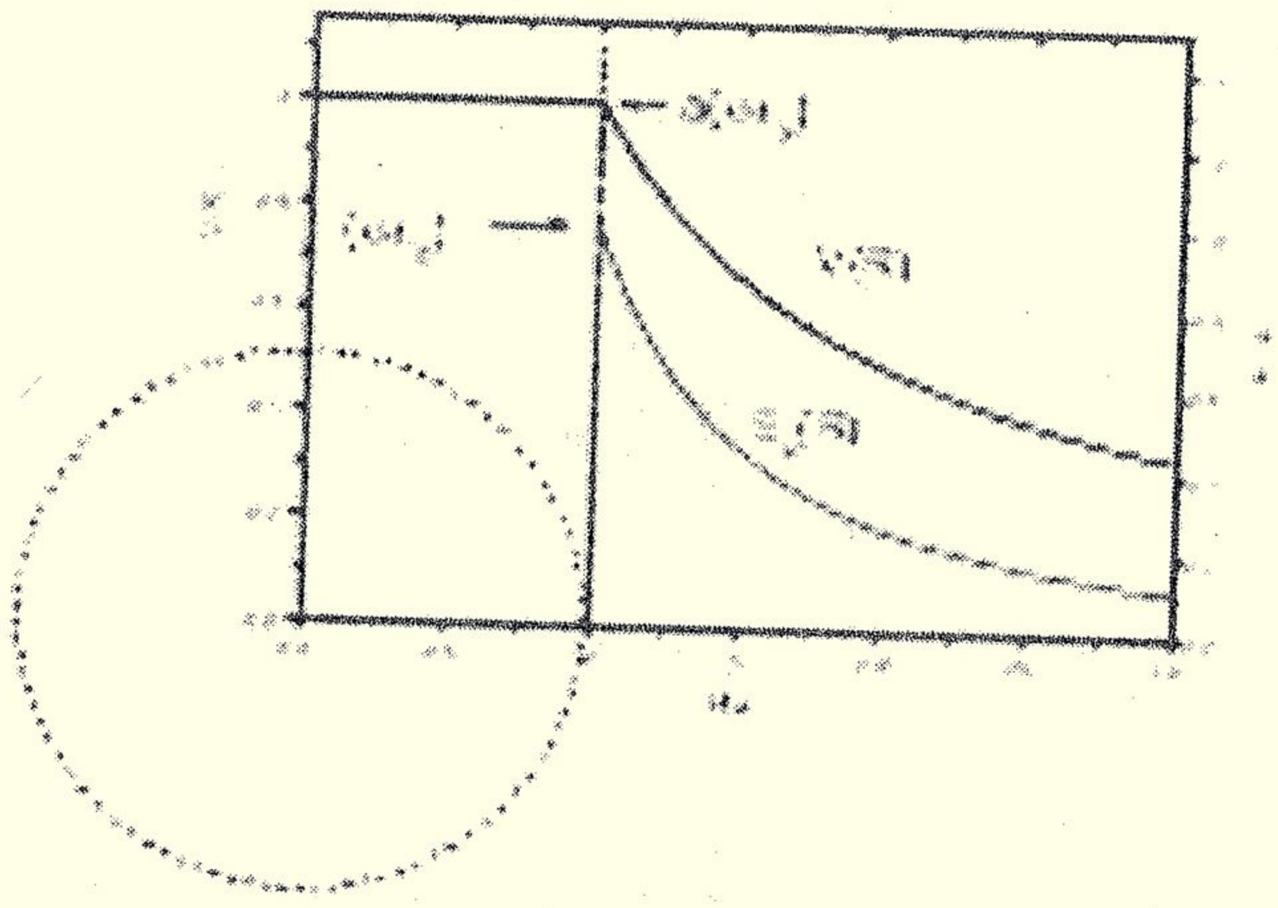


Figura 1.26: Variaţia cu distanţa a câmpului şi a potenţialului unei distribuţii de sarcină superficială sferică de rază a

$$V_{ext} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R} \tag{1.141}$$

Reprezentarea grafică a funcţiilor $E(R)$ şi $V(R)$. Fig. 1.26, pune în evidenţă discontinuitatea câmpului $\vec{E}$ şi continuitatea potenţialului V la traversarea suprafeţei distribuţiei (pentru $R = a$) şi totodată faptul că, în *interiorul sferei* câmpul este nul şi potenţialul este constant, în timp ce, *în exterior*, expresiile câmpului şi potenţialului sunt asemănătoare celor în care sarcinile s-ar afla în centrul sferei. Se înţelege astfel motivul pentru care, în balanţa de torsiune a lui Coulomb, utilizarea a două sfere încărcate uniform cu sarcini electrice nu afectează precizia verificării legii lui Coulomb, această lege fiind valabilă pentru sarcini punctiforme. Totuşi este necesar ca cele două sfere să nu fie prea apropiate pentru a asigura un grad suficient de uniformitate a distribuirii sarcinii. Când vom prezenta modul în care se distribuie sarcinile electrice pe suprafaţa unui conductor se vor înţelege mai bine condiţiile de realizate a experimentului menţionat.

Distribuţie volumică sferică de rază a *şi de densitate* $\rho = 3Q/4\pi a^3$:

Câmpul electric în interior, $(R < a)$, (Fig. 1.27): Aplicăm mai întâi teorema lui Gauss, ţinând cont de simetria sferică a problemei, evaluând

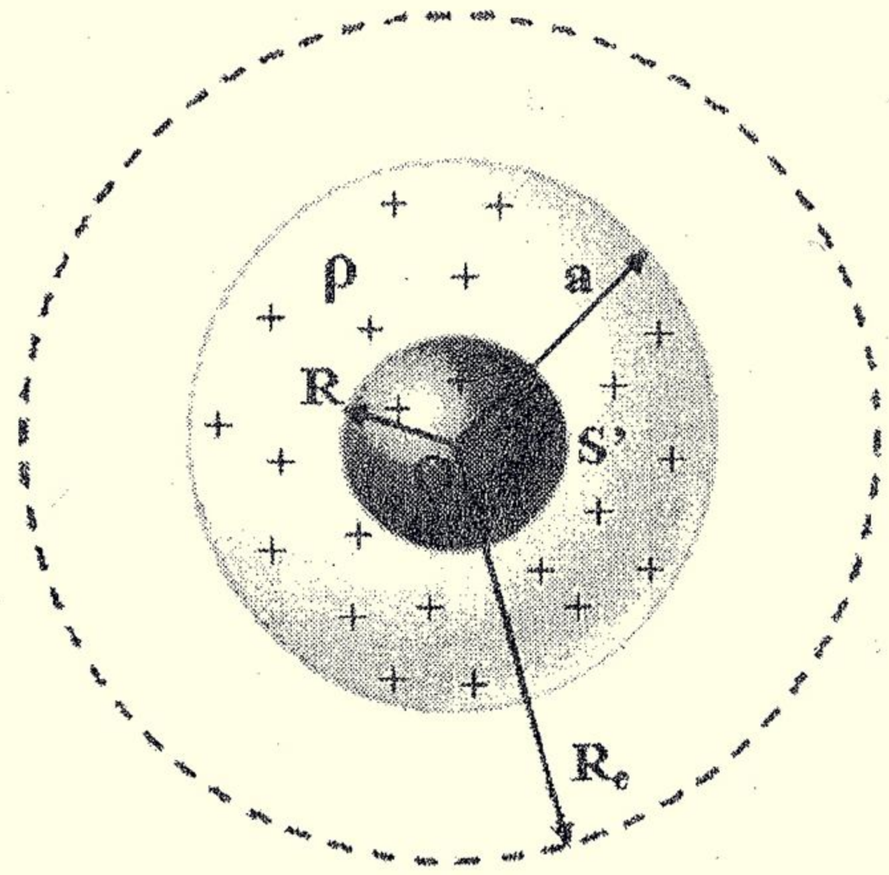


Figura 1.27: Sarcina distribuită uniform în volumul sferei de rază a

fluxul electric printr-o suprafaţă sferică S' interioară sferei de rază a, sarcina fiind distribuită uniform în volumul v' limitat de această suprafaţă :

$$\int_{S'} \vec{E}_{int} \cdot \overrightarrow{dS} = 4\pi R^2 E_{int} = \frac{\int_{v'} \rho dv}{\varepsilon_0} = \frac{3Q}{4\pi a^3 \varepsilon_0} \frac{4\pi}{3} R^3 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \frac{R^3}{a^3} \tag{1.142}$$

Rezultă dc aici că, pentru orice $R < a$ câmpul în interiorul distribuţici volumice sferice este

$$E_{int} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{R}{a^3} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} R \tag{1.143}$$

sau

$$\vec{E}_{int} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{R}{a^3} \frac{\vec{R}}{R} \tag{1.144}$$

Remarcăm că în interiorul distribuţiei volumice uniforme de sarcină ($R < a$), câmpul este proporţional cu distanţa.

Câmpul electric în exterior ($R > a$). Fluxul câmpului electric prin suprafaţa sferică (S') de rază R, mai mare decât raza a, este,

$$\int_{S'} \vec{E}_{ext} \cdot \overrightarrow{dS} = 4\pi R^2 E_{ext} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{1.145}$$

de unde rezultă că

$$E_{ext} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R^2} \tag{1.146}$$

sau, în forma vectorială,

$$\vec{E}_{ext} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R^2}\frac{\vec{R}}{R} \tag{1.147}$$

Se observă imediat că în exteriorul unei distribuţii volumice sferice este similară cu cea a câmpului care ar fi produs de o sarcină punctiformă egală cu sarcina volumică totală dacă ea ar fi concentrată în centrul sferei.

Câmpul electric la suprafaţă,$(R = a)$. Ecuaţiile (1.144) şi (1.147) dau pentru $R = a$,

$$\left(\vec{E}_{int}\right)_{R=a} = \left(\vec{E}_{ext}\right)_{R=a} \tag{1.148}$$

Această relaţie exprimă o proprietate generală a câmpului electrostatic: continuitatea vectorului $\vec{E}$ la traversarea unei distribuţii volumice de sarcină.

Potenţialul electrostatic în interior, se deduce imediat din relaţia $V_{int} = -\int \vec{E}_{int}\cdot\overrightarrow{dR}$:

$$V_{int} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R^2}{2a^3} + A \tag{1.149}$$

Potenţialul electrostatic în exterior este $V_{ext} = -\int \vec{E}_{ext}\cdot\overrightarrow{dR}$, sau ţinând cont de (1.147),

$$V_{ext} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R} + B \tag{1.150}$$

Constantele A şi B pot fi determinte luând în consideraţie condiţiile la limită: la infinit $V = 0$ iar pe suprafaţă $(V_{int})_{R=a} = (V_{ext})_{R=a}$ În final se obţine:

$$V_{int} = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3}{a} - \frac{R^2}{a^3}\right) \tag{1.151}$$

$$V_{ext} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}. \tag{1.152}$$

Reprezentarea grafică a funcţiilor $E(R)$ şi $V(R)$ pentru distribuţia volumică sferică de sarcină, dată în Fig. 1.28, evidenţiază proprietăţi ale câmpului şi potenţialului în *interiorul* sferei care sunt net diferite de cele ale distribuţiei sferice superficiale, (o creştere liniară a lui E_{int} şi o micşorare de alură parabolică a lui V_{int}), în timp ce proprietăţile în *exteriorul* sferei sunt asemănătoare celor ale sarcinilor concentrate în centrul sferei.

3) Distribuţii sferice superficiale concentrice. Considerăm două sfere concentrice cu razele R_1 şi R_2, $(R_2 > R_1)$, încărcate uniform cu sarcinile Q_1 şi Q_2, şi o suprafaţă sferică S, de rază R, având acelaşi centru ca şi sferele

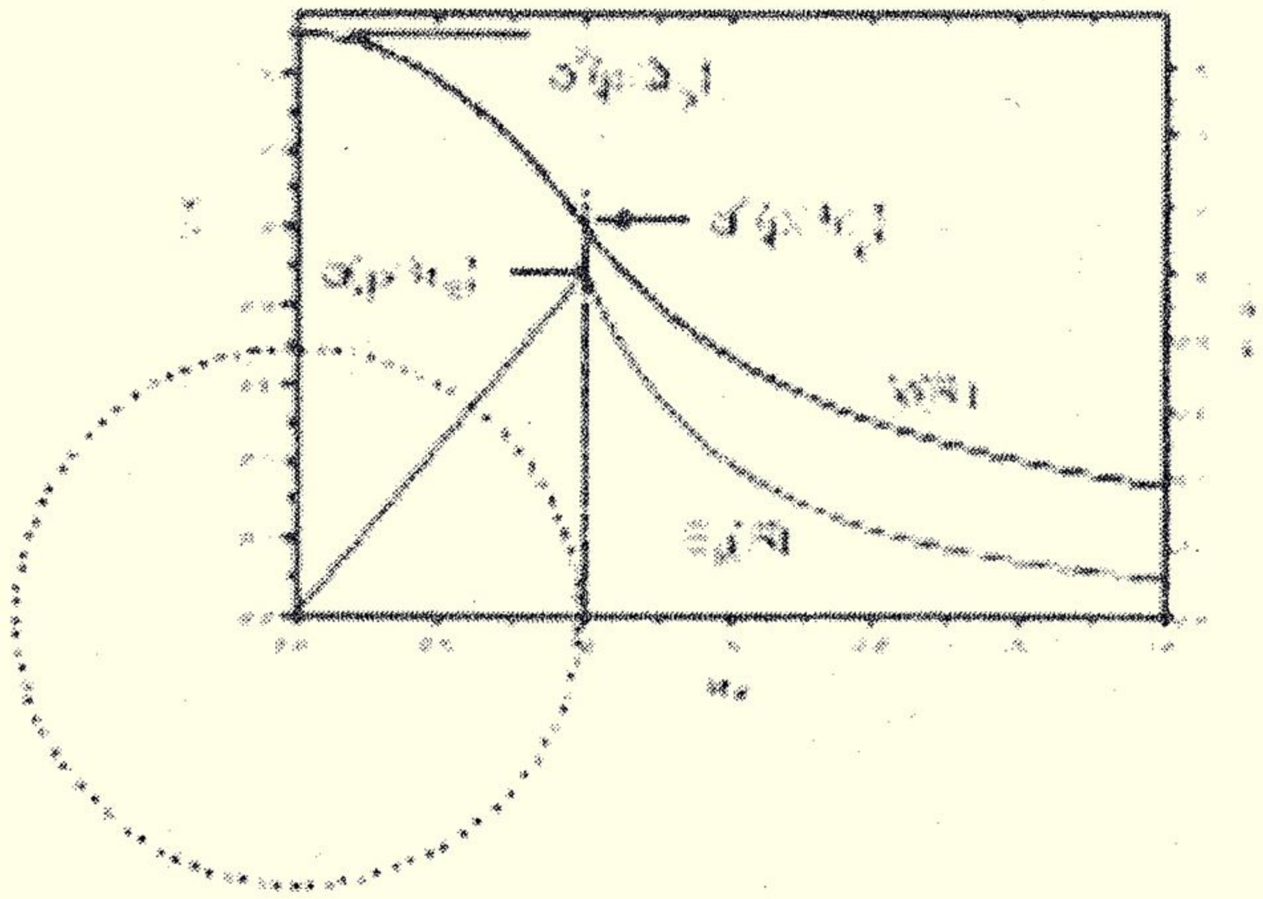


Figura 1.28: Variaţia cu distanţa a câmpului şi a potenţialului unei distribuţii volumice de sarcină repartizată uniform în sfera de rază a

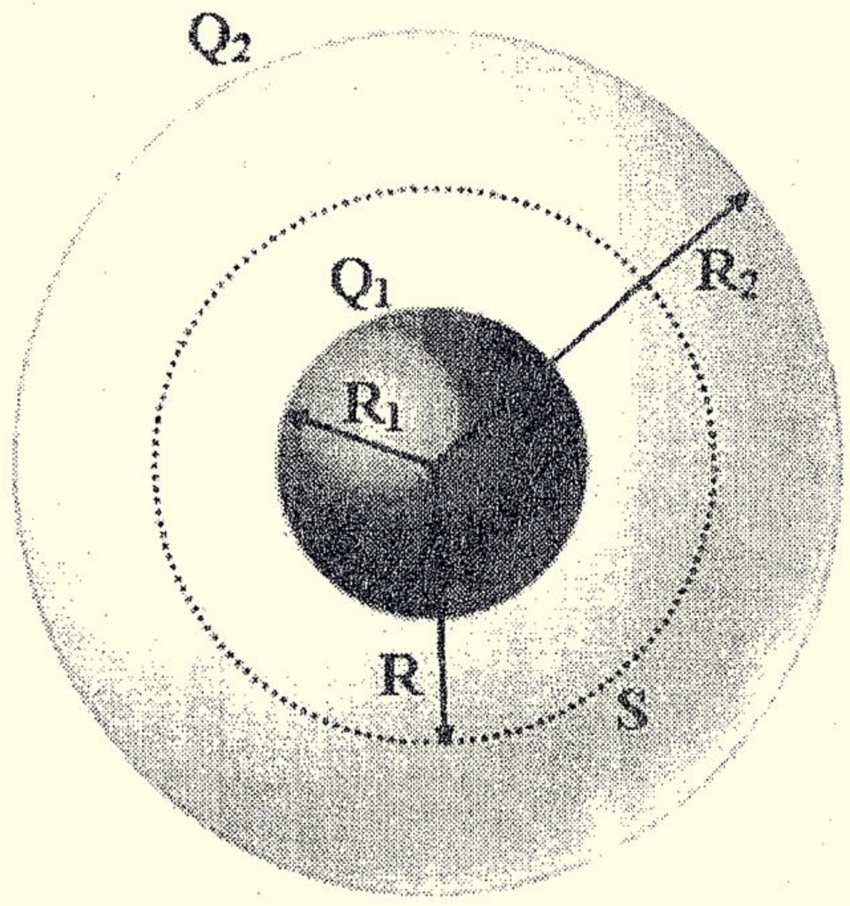


Figura 1.29: Distribuţii sferice superficiale concentrice

de raze R_1 şi R_2, (Fig. 1.29). Datorită simetriei sistemului, în toate punctele acestei suprafeţe vectorul $\vec{E}$ este perpendicular pe suprafaţă şi are aceeaşi mărime. Fluxul câmpului $\vec{E}$ prin suprafaţa S este, conform teoremei lui Gauss,

$$\int_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = E 4\pi R^2 \tag{1.153}$$

ţinând seama de faptul că această integrală este proporţională cu sarcina totală aflată în volumul limitat de suprafaţa S, calculăm câmpul electrostatic în următoarele circumstanţe: pentru $R < R_1$; $E_0 4\pi R^2 = 0$ şi $E_0 = 0$ pentru $R_1 < R < R_2$; $E_i 4\pi R^2 = \frac{Q_1}{\varepsilon_0}$, şi astfel, $E_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{R^2}$, pentru $R > R_2$; $E_e 4\pi R^2 = \frac{Q_1+Q_2}{\varepsilon_0}$, şi $E_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1+Q_2}{R^2}$.

Pentru *determinarea potenţialelor* folosim relaţia dintre $\vec{E}$ şi V în coordonate sferice. Cu $V = -\int \vec{E}\cdot\overrightarrow{dR}$ se obţine: pentru $R < R_1$; $V_0 = C_1$, pentru $R_1 < R < R_2$; $V_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{R} + C_2$, pentru $R > R_2$; $V_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1+Q_2}{R} + C_3$. Constantele C_1, C_2 şi C_3 se determină din condiţiile următoare: pentru $R \to \infty$; $V_e \to 0$, de unde $C_3 = 0$, pentru $R = R_1$; $V_i = V_e$ şi de aici $C_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{R_1} + C_2$, pentru $R = R_2$; $V_i = V_e$, şi $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{R_2} + C_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1+Q_2}{R_2}$. Din ultimele două condiţii găsim:

$$C_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1}{R_1} + \frac{Q_2}{R_2}\right) \text{ şi } C_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2}{R_2}.$$

Înlocuind constantele C_1, C_2 şi C_3 în expresiile potenţialului, obţinem: pentru $R < R_1$ $V_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1}{R_1} + \frac{Q_2}{R_2}\right)$, pentru $R_1 < R < R_2$: $V_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_2}{R_2} + \frac{Q_1}{R}\right)$, pentru $R > R_2$: $V_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1+Q_2}{R}$.

1.15 Câmpul şi potenţialul distribuţiilor de sarcină cilindrice

Considerăm o distribuţie volumică de sarcină de densitate ρ de formă cilindrică având secţiunea transversală circulară de rază a şi lungimea infinită, şi calculăm câmpul şi potenţialul la distanţa R de axa cilindrului. Pentru aceasta alegem o suprafaţă cilindrică S cu raza R şi lungimea L, coaxială cu cilindrul de rază a, (Fig. 1.30), prin care evaluăm fluxul vectorului $\vec{E}$. Datorită simetriei, vectorul $\vec{E}$ are aceeaşi intensitate în orice punct al suprafeţei S

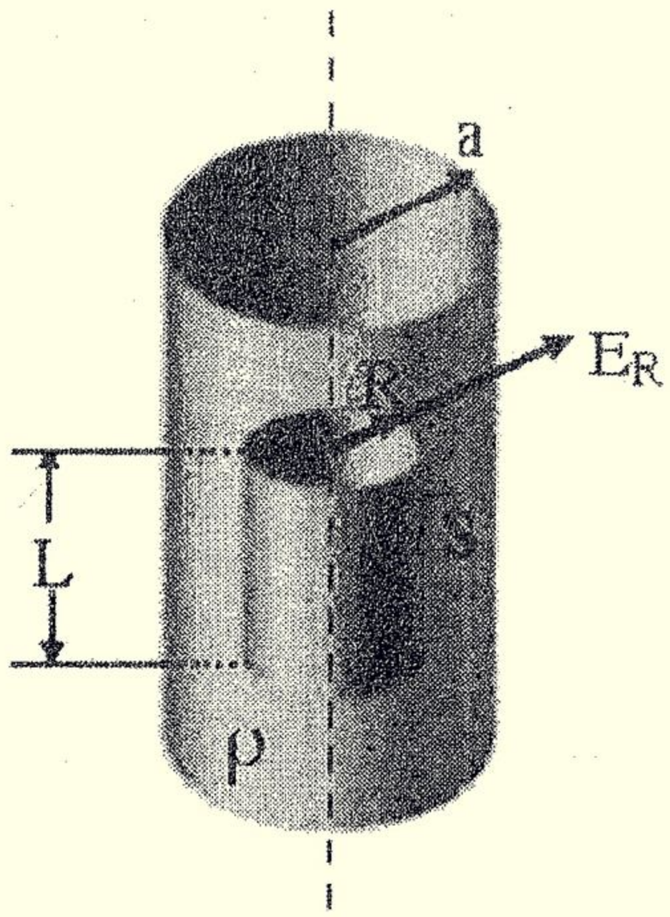


Figura 1.30: Distribuţie volumică cilindrică de sarcină

şi este perpendicular pe aceasta. Teorema lui Gauss aplicată acestui sistem este,

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E_R 2\pi RL = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dv \tag{1.154}$$

unde E_R este intensitatea câmpului la distanţa R de axa cilindrului şi $dv = 2\pi LRdR$. De aici obţinem următoarele expresii pentru câmpul electric în interiorul şi în exteriorul cilindrului, respectiv, pentru $R < a$; $E_{Ri} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} 2\pi\rho R$, sau

$$E_{Ri} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} R \tag{1.155}$$

pentru $R > a$; $E_{Re} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2\pi a^2 \rho}{R}$, sau

$$E_{Re} = \frac{a^2 \rho}{2\varepsilon_0} \frac{1}{R} \tag{1.156}$$

Pentru determinarea potenţialului folosim relaţia dintre potenţial şi câmp în coordonate cilindrice, care, în acest caz, este $V = -\int \vec{E}_R \cdot \overrightarrow{dR}$. Astfel, pentru $R < a$, $V_i = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \pi\rho R^2 + C_1$ sau $V_i = -\frac{\rho}{4\varepsilon_0} R^2 + C_1$, pentru $R > a$, $V_e = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} 2\pi a^2 \rho \ln R + C_2$ sau $V_e = -\frac{a^2\rho}{2\varepsilon_0} \ln R + C_2$. Constantele C_1 şi C_2 se determină din condiţia de continuitate a potenţialului şi de anulare a acestuia într-un punct dat, de referinţă ($R = 0$): pentru $R = 0$, $V_i = 0$, de

unde: $C_1 = 0$, pentru $R = a$: $V_i = V_e$, de unde: $C_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\pi a^2\rho\,(2\ln a - 1)$, sau $C_2 = \frac{a^2\rho}{4\varepsilon_0}\,(2\ln a - 1)$. În final, după înlocuirea constantelor cu expresiile lor obţinem pentru $R < a$ $V_i = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\rho\pi R^2$, sau

$$V_i = -\frac{\rho}{4\varepsilon_0}R^2 \tag{1.157}$$

pentru $R > a$, $V_e = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\rho 2\pi a^2\left[\ln\frac{R}{a} + \frac{1}{2}\right]$, sau

$$V_e = -\frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0}\left[\ln\frac{R}{a} + \frac{1}{2}\right]. \tag{1.158}$$

Observaţie: Din ultimele două exemple vedem că nu întotdeauna se poate alege drept punct de referinţă, în care potenţialul este zero, un punct aflat la distanţă infinită de distribuţia de sarcini electrice. Acest lucru este posibil (dar nu obligatoriu !) atunci când toate sarcinile electrice din sistem pot fi incluse într-o sferă de rază finită. Când distribuţia de sarcină se extinde până la infinit, precum în cazul distribuţiei cilindrice discutate în secţiunea aceasta, nu se poate alege drept punct de referinţă un punct la infinit.

1.16 Câmpul şi potenţialul distribuţiilor liniare de sarcină

Câmpul şi potenţialul unui fir infinit uniform încărcat

Considerăm un lanţ de sarcini uniform distribuite pe o lungime infinită, având densitatea liniară λ . Problema ar părea să fie mai uşor rezolvabilă dacă s-ar evalua mai întâi potenţialul ca mărime scalară urmând să se deducă apoi câmpul electric. Dar acest procedeu nu este aplicabil aici deoarece la infinit există sarcină. Considerând un element de sarcină $dQ = \lambda dz$ dintr-un lanţ rectiliniu şi de lungime infinită, $(-\infty \le z \le +\infty)$ (Fig. 1.31), formula cunoscută pentru potenţialul unei distribuţii continue liniare de sarcină ar conduce la concluzia că potenţialul este infinit,

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz}{r} =$$

$$= \frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\infty}\frac{dz}{\sqrt{R^2+z^2}} = \frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[ln\left(z+\sqrt{R^2+z^2}\right)\right]_0^{\infty} = \infty.$$

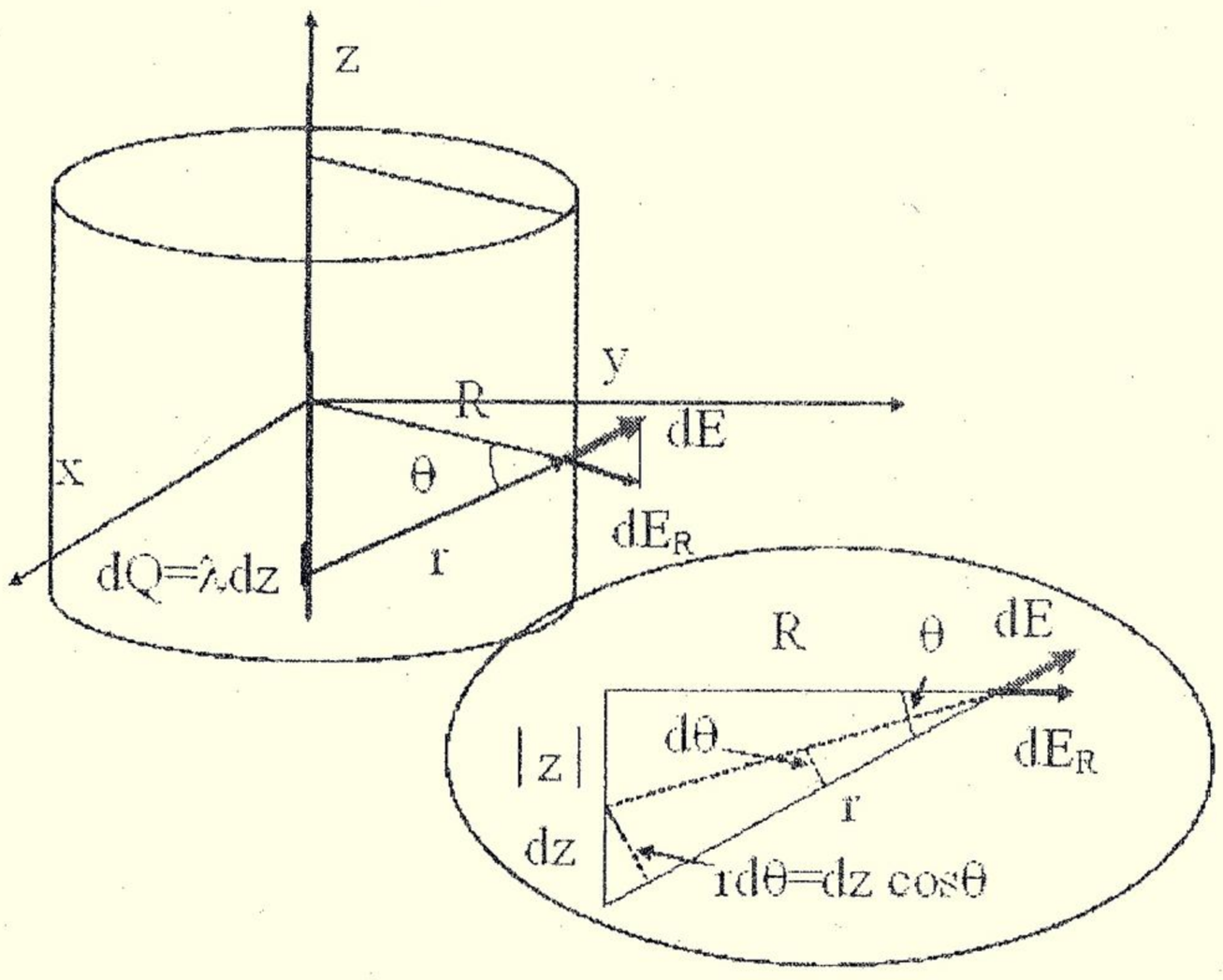


Figura 1.31: Distribuţie liniară de sarcină

În consecinţă vom calcula mai întâi *câmpul electric la o distanţă* R de un fir rectiliniu şi infinit, uniform încărcat, utilizînd relaţia $\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$. Din motive de simetrie vom lua în consideraţie numai componenta câmpului în direcţia perpendiculară pe direcţia firului, $dE_R = dE\cos\theta$ şi totodată faptul că $dz\cos\theta = rd\theta$ şi $R = r\cos\theta$:

$$E_R = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz}{r^2}\cos\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{R}\cos\theta = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R} \qquad (1.159)$$

sau

$$\vec{E}_R = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\frac{\vec{R}}{R^2} \qquad (1.160)$$

Se obţine acelaşi rezultat dacă se aplică teorema lui Gauss pentru o suprafaţă cilindrică de rază R, coaxială cu firul şi cu lungimea egală cu unitatea. În acest caz, $2\pi RE_R = \lambda/\varepsilon_0$, şi de aici rezultă E_R la fel ca în formula (1.160).

Potenţialul electric se deduce imediat, utilizând relaţia cunoscută, $V = -\int E_R dR$ care dă,

$$V = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int\frac{dR}{R} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}lnR + C.$$

Constanta de integrare C poate fi definită dacă se consideră, de exemplu, potenţialul nul la distanţa $R = 1$. În acest caz $C = 0$. În consecinţă, expresia potenţialului distribuţiei liniare de sarcină într-un punct la distanţa R este

$$V = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} lnR \tag{1.161}$$

Acest potenţial se numeşte *potenţial logaritmic* şi el este diferit de potenţialul coulombian. Când R tinde la infinit potenţialul logaritmic tinde şi el către infinit, în timp ce potenţialul coulombian tinde către zero. Problema determinării câmpului şi a potenţialului distribuţiei liniare de sarcină mai poate fi tratată ca un caz particular al distribuţiei cilindrice de sarcină.

Câmpul şi potenţialul unei distribuţii inelare de sarcină

Considerăm un inel foarte subţire de rază a, încărcat uniform cu sarcină de densitate liniară λ, şi urmărim să calculăm câmpul şi potenţialul în punctele aflate pe axa inelului la distanţa z de centrul acestuia. Este mai simplu să calculăm mai întâi potenţialul, considerând un element de sarcină $dQ = \lambda dl$, unde dl reprezintă un element din lungimea inelului (Fig. 1.32).

Astfel,

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi a}\frac{dl}{\sqrt{a^2+z^2}}. \tag{1.162}$$

După efectuarea integralei obţinem,

$$V = \frac{\lambda}{2\varepsilon_0}\frac{a}{\sqrt{a^2+z^2}} \tag{1.163}$$

Din consideraţii de simetrie, componentele perpendiculare pe axa inelului ale câmpului sunt nule, $E_x = E_y = 0$, iar $E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$ din care se obţine:

$$E_z = \frac{\lambda}{2\varepsilon_0}\frac{az}{(a^2+z^2)^{3/2}} \tag{1.164}$$

Potenţialul şi câmpul în centrul inelului, unde $z = 0$, sunt: $V = \frac{\lambda}{2\epsilon_0}$ şi $\vec{E} = 0$. La distanţa $z = a/\sqrt{2}$, câmpul E_z are valoarea maximă: $(E_z)_{\max} = \frac{\lambda}{3\sqrt{3}\epsilon_0 a}$.Exprimând valorile lui z în valori reduse la raza a, respectiv $\widehat{z} = \frac{z}{a}$, şi introducându-le în formulele (1.162) şi (1.163), obţinem expresiile corespunzătoare ale potenţialului $\widehat{V}$ şi câmpului $\widehat{E}_z$,

$$\widehat{V} = \frac{V}{\frac{\lambda}{2\varepsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{1+\widehat{z}^2}} \tag{1.165}$$

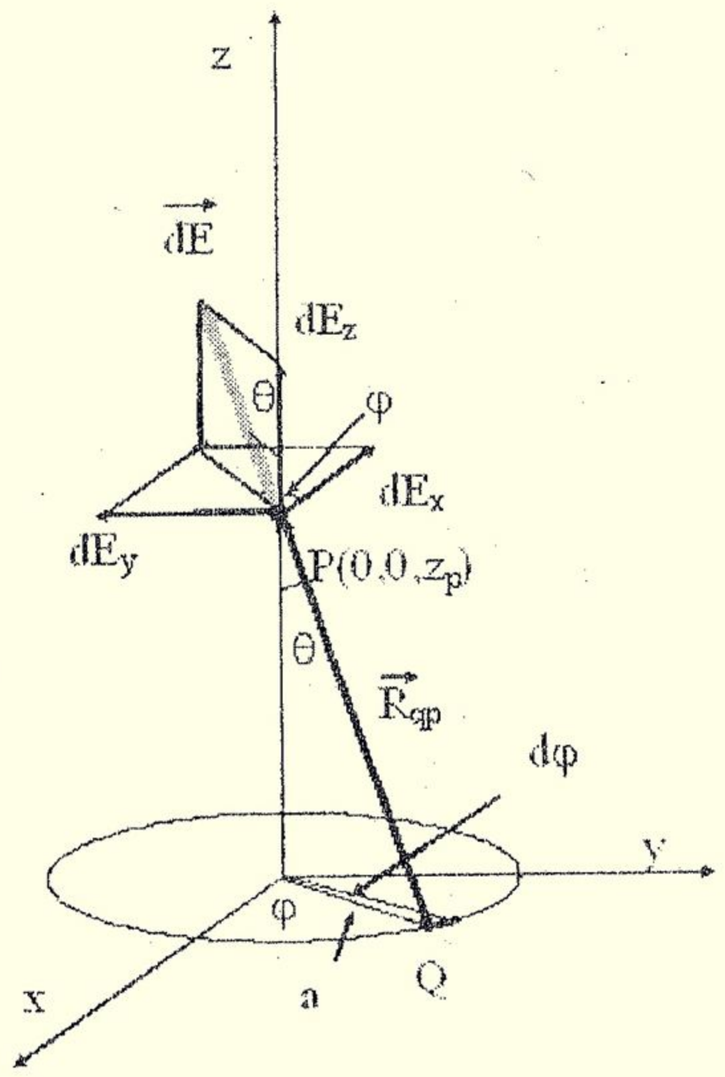


Figura 1.32: Distribuţie inelară de sarcină

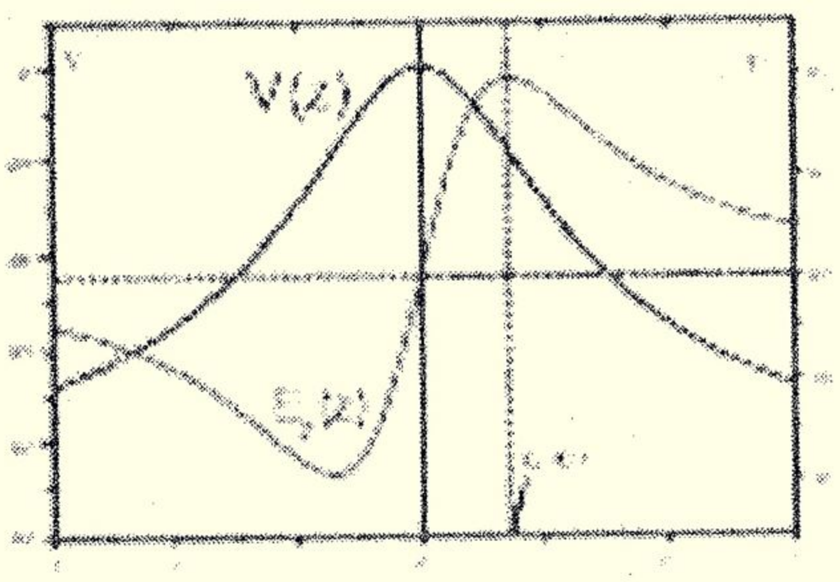


Figura 1.33: Variaţia cu distanţa a câmpului şi a potenţialului pe axa unei distribuţii inelare de sarcină

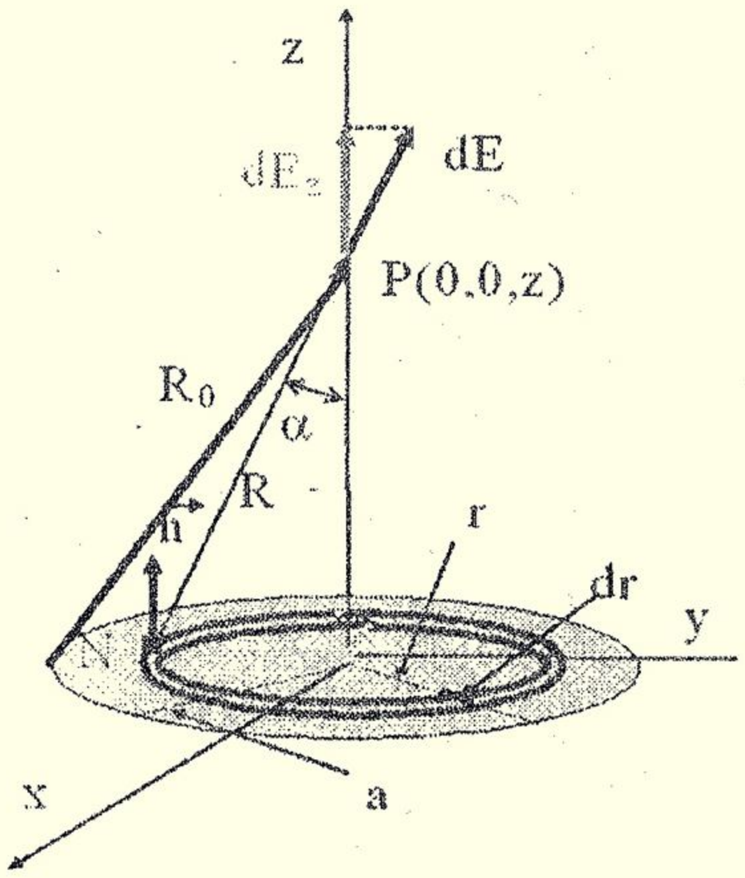


Figura 1.34: Câmpul şi potenţialul unei sarcini superficiale distribuite uniform pe un disc

$$\widehat{E}_z = \frac{E_z}{\frac{\lambda}{2\varepsilon_0 a}} = \frac{\widehat{z}}{\left(1+\widehat{z}^2\right)^{3/2}} \tag{1.166}$$

Aceste expresii oferă posibilitatea unei reprezentări mai comode a funcţiilor $\widehat{V}(z)$ şi $\widehat{E}_z(z)$ (Fig. 1.33).

1.17 Câmpul şi potenţialul distribuţiilor superficiale

Disc uniform încărcat

Sarcina este distribuită uniform pe suprafaţa unui disc de rază a, densitatea de sarcină fiind σ. *Câmpul electric*: Un element de suprafaţă dS localizat în jurul punctului N de pe disc, conţinând sarcina $dQ = \sigma dS$, produce un câmp electric dE într-un punct P, situat la distanţa R pe axa discului (axa Oz). În virtutea simetriei de revoluţie în raport cu axa discului, componentele câmpului în direcţiile perpendiculare pe axă se anulează reciproc rămânând numai componenta orientată în direcţia axei, $dE_z = dE\cos\alpha$, respectiv,

ınei dis-

$$dE_z = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dS\cos\alpha}{R^2} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{n}\cdot\vec{R}}{R^3}dS.$$

Introducând, în această expresie, unghiul solid sub care se vede, din punctul P , elementul de suprafaţă $d\vec{S} = \vec{n}dS$ şi ţinând seama de definiţia unghiului solid, potrivit căreia $d\Omega$ este pozitiv când unghiul dintre vectorii $\vec{n}$ şi $\vec{R}$ este ascuţit, obţinem:

$$dE_z = -\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}d\Omega$$

S-a considerat $d\Omega$ cu semnul negativ deoarece, în cazul considerat aici, poziţia suprafeţei dS în raport cu punctul P este definită prin vectorul $\overrightarrow{PN}$ care face un unghi mai mare de 90° cu normala la suprafaţă. Integrând pentru întreaga distribuţie se obţine expresia

$$E_z = -\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\Omega \tag{1.167}$$

în care Ω este unghiul solid sub care se vede din punctul P suprafaţa discului, respectiv $\Omega = -\frac{S}{R_0^2}$. Aici S reprezintă suprafaţa calotei sferice care se sprijină discul de rază a şi aceasta este egală cu:

$$\Omega = -\frac{2\pi R_0\left(R_0 - z\right)}{R_0^2} = -2\pi\left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\right). \tag{1.168}$$

În final, după înlocuirea lui Ω în (1.167) se obţine expresia câmpului în direcţia normalei pozitive la suprafaţa discului ($z > 0$):

$$E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)$$

sau în general

$$\vec{E} = \frac{\sigma\vec{n}}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{|z|}{\sqrt{a^2+z^2}}\right) \tag{1.169}$$

b. Potenţialul electric în punctul P poate fi calculat direct, considerând sarcinile elementare $dQ = 2\pi r\sigma dr$ repartizate pe coroane de lăţime dr situate la distanţa r faţă de centrul discului, respectiv la aceeaşi distanţă R de punctul P: $dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dQ}{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\pi r\sigma dr}{\sqrt{r^2+z^2}}$. Integrând elementele dr de la 0 la a, obţinem expresia potenţialului întregii distribuţii, $V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left|\sqrt{z^2+r^2}\right|_0^a = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{z^2+a^2} - |z|\right)$. La acelaşi rezultat se ajunge dacă pornim de la cunoaşterea câmpului E_z (formula 1.169) şi efectuăm întegrala $V = -\int E_z dz$. Figura 1.35 dă reprezentarea grafică a funcţiilor $E(z)$ şi $V(z)$ în funcţie de poziţia pe axa Oz.

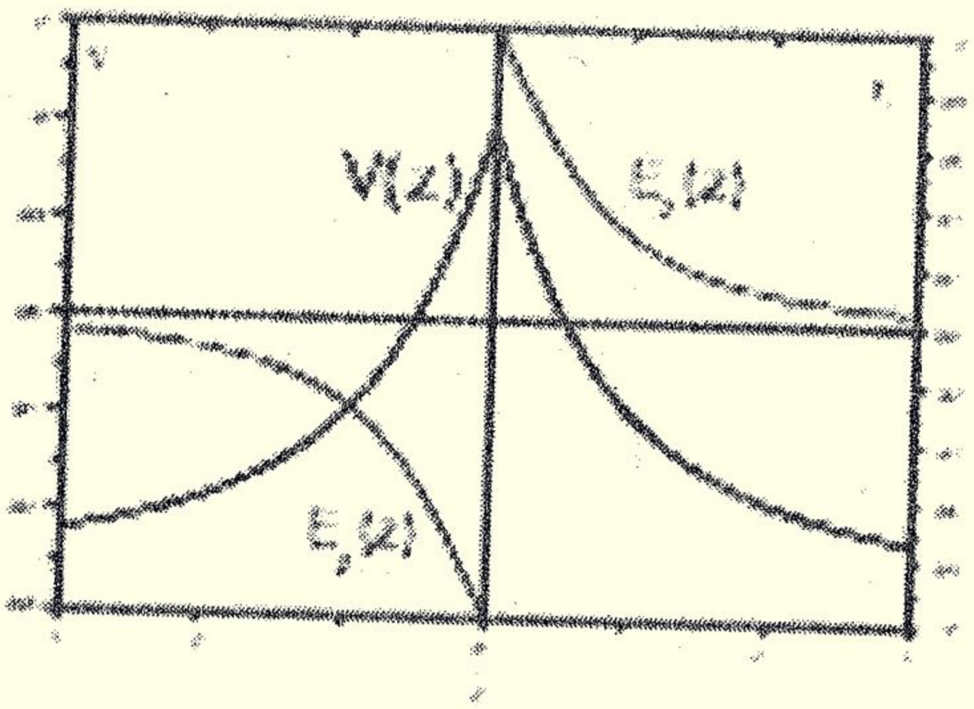


Figura 1.35: Variaţia cu distanţa a câmpului şi a potenţialului pe axa unui disc încărcat uniform

Plan infinit uniform încărcat

Discul considerat în paragraful precedent devine un plan infinit dacă facem ca raza lui să tindă către infinit. Menţinând constantă densitatea de sarcină superficială σ, obţinem la limită un plan infinit uniform încărcat. În aceste condiţii formula (1.169) dă pentru *câmpul electric în exteriorul unui plan infinit*, expresia:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{n} \tag{1.170}$$

Câmpul electric este uniform şi de acelaşi modul în fiecare dintre cele două zone situate de o parte şi de cealaltă a planului, dar dirijat în sensuri opuse, fiind pozitiv în sensul versorului $\vec{n}$, $E_+ = +\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ (pentru $z > 0$) şi negativ în sensul opus lui $\vec{n}$, $E_- = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ (pentru $z < 0$).

Potenţialul electric în exteriorul distribuţiei plane infinite se determină pornind de la relaţia $V = -\int E dz$, ştiind că aici E coincide cu componenta E_z, normală la plan:

$$V = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}|z| + V_0 \tag{1.171}$$

Pentru $z = 0$, se obţine $V = V_0$ şi astfel suprafaţa planului uniform încărcat este o suprafaţă echipotenţială având potenţialul V_0. Echipotenţialele de valori diferite de V_0 sunt suprafeţe paralele la planul încărcat. Dacă prin

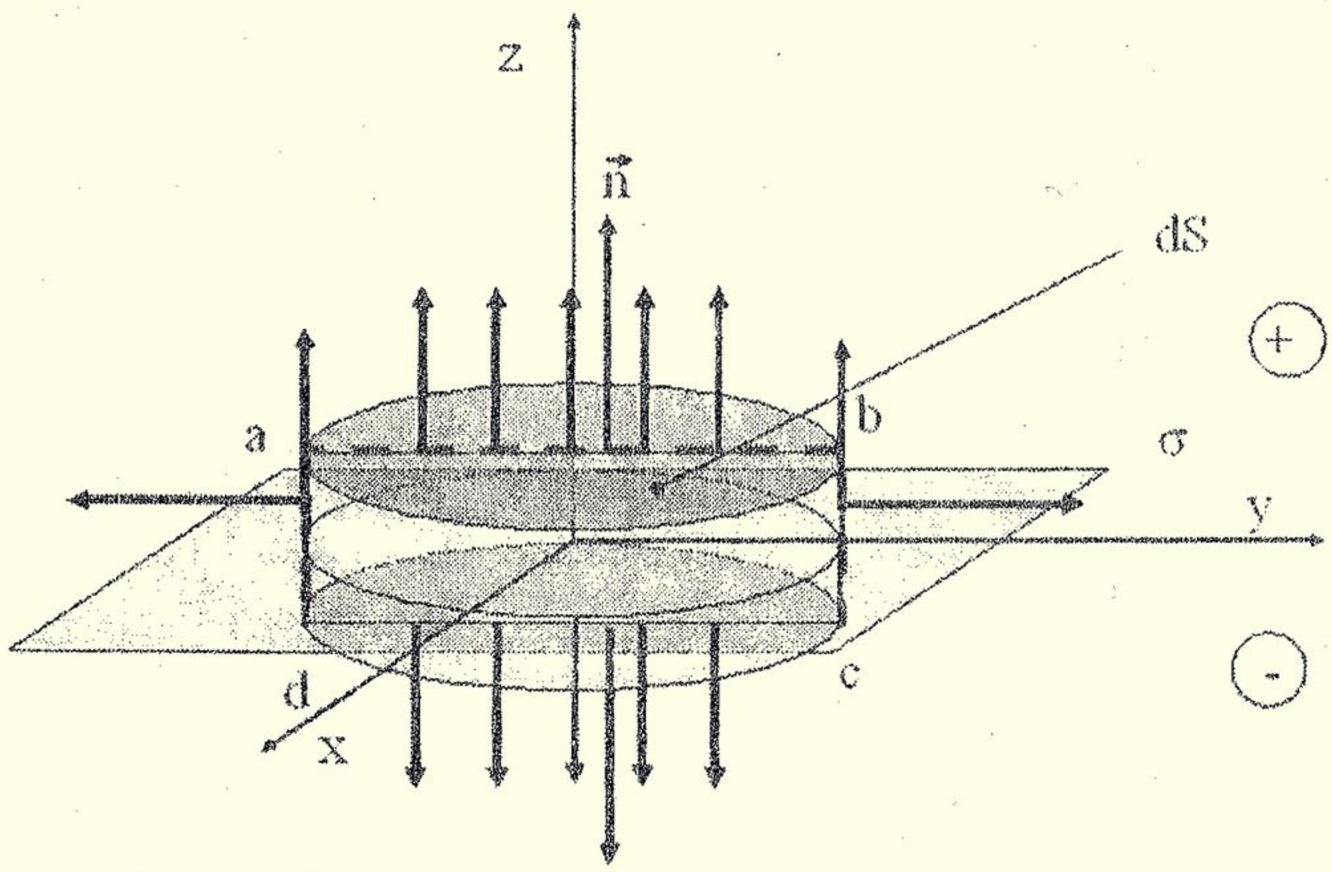


Figura 1.36: Distribuţie superficială de sarcină traversată de componentele normală şi tangenţială ale câmpului

convenţie se alege $V_0 = 0$ în originea sistemului de coordonate, expresia potenţialului distribuţiei plane infinite, în coordonate carteziene, este:

$$V = -Ez. \tag{1.172}$$

1.18 Condiţii la limită pentru E_t şi E_n

Distribuţie superficială de sarcină pe o suprafaţă S

Densitatea superficială de sarcină într-un punct P al suprafeţei S este $\sigma = dQ/dS$. Suprafaţa S, traversată de câmpul electric $\vec{E}$, separă spaţiul în două regiuni (+) şi (−), vectorul unitar $\vec{n}$ normal la suprafaţă în P, fiind orientat de la regiunea (−) către regiunea (+). Considerăm acum o suprafaţă Gauss de forma unui mic cilindru în jurul punctului P, având suprafaţa laterală neglijabilă faţă de suprafeţele de bază dS. În acest caz acestea sunt practic paralele cu suprafaţa S. Fluxul vectorului $\vec{E}$ prin suprafaţa laterală este neglijabil şi teorema lui Gauss se scrie

$$\left(\vec{n}\cdot\vec{E}_{(+)}\right)dS - \left(\vec{n}\cdot\vec{E}_{(-)}\right)dS = \frac{dQ}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma dS}{\varepsilon_0}$$

sau

$$\vec{n}\cdot\left[\vec{E}_{(+)} - \vec{E}_{(-)}\right] = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \tag{1.173}$$

sau încă

$$E_{n(+)} - E_{n(-)} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \tag{1.174}$$

în care s-a notat cu E_n *componenta normală a vectorului* $\vec{E}$ în zonele (+) şi (−). Considerăm acum conturul închis *abcd* determinat de intersecţia cilindrului cu un plan oarecare paralel cu $\vec{n}$ (Fig. 1.36), şi să evaluăm circulaţia vectorului $\vec{E}$ pe acest contur. Deoarece lungimile *ad* şi *bc* sunt neglijabile faţă de lungimile *ab* şi *cd* circulaţia vectorului $\vec{E}$ este nulă. Într-adevăr,

$$\overrightarrow{ab} \cdot \vec{E}_{(+)} + \overrightarrow{cd} \cdot \vec{E}_{(-)} = 0$$

sau, având în vedere faptul că $\overrightarrow{ab} = -\overrightarrow{cd}$ şi că produsele scalare reprezintă *componentele tangenţiale* E_t *ale vectorului* $\vec{E}$ (componente paralele cu suprafaţa S) de o parte şi de alta a suprafeţei S, expresia precedentă poate fi scrisă simplu,

$$E_{t(+)} - E_{t(-)} = 0 \tag{1.175}$$

sau încă

$$\vec{n} \times \left(\vec{E}_{(+)} - \vec{E}_{(-)} \right) = 0 \tag{1.176}$$

În concluzie, ecuaţiile (1.173) şi (1.176) exprimă faptul că *la traversarea unei distribuţii superficiale de sarcină, componenta normală a câmpului electric* $\vec{E}$ *este discontinuă, în timp ce componanta tangenţială este continuă.*

Aplicaţii. Probleme

1. Demonstraţi că un segment liniar de lungime finită, d, are suprafeţele echipotenţiale de formă elipsoidală, focarele fiind chiar cele două puncte care delimitează segmentul de dreaptă.

2. Calculaţi câmpul electric produs într-un punct oarecare al axei de simetrie a unei distribuţii superficiale sferice de rază R_0 de forma: $\sigma = \sigma_0 \cos\theta$ (Fig.1.38). Reprezentaţi grafic câmpul $E_z(z)$ şi potenţialul $V(z)$. Comparaţi rezultatul cu cel obţinut pentru distribuţia sferică uniformă. Utilizând expresia câmpului creat de această distribuţie de sarcină în puncte situate departe de distribuţie $z \gg R_0$, calculaţi momentul dipolar al distribuţiei.

3. Într-o sferă de rază R_0 se află o cavitate sferică de rază a. Calculaţi câmpul electric în această cavitate.

4. Calculaţi suprafeţele echipotenţiale ale unui sistem de două fire liniare infinite, încărcate uniform cu distribuţii cu densităţile λ şi $-\lambda$ (dipol liniar).

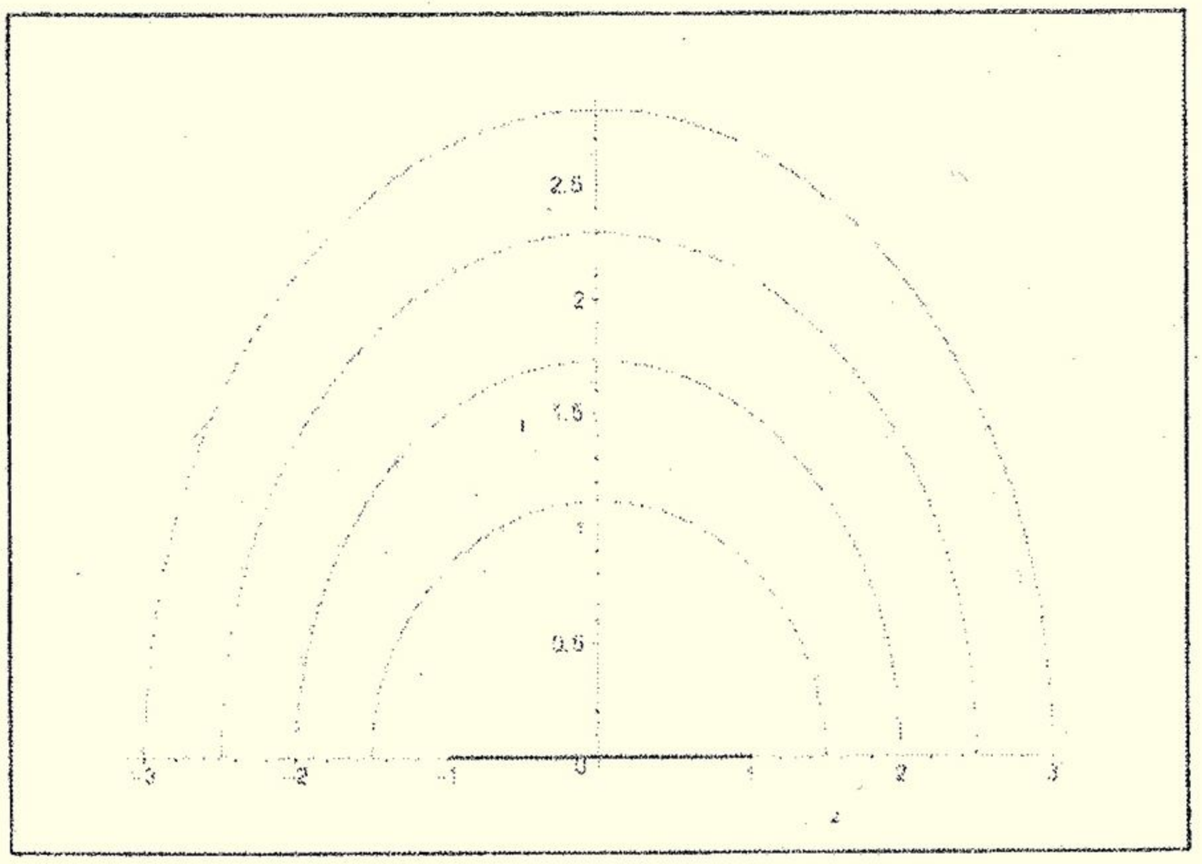


Figura 1.37: Problema 1. Suprafeţele echipotenţiale pentru o distribuţie de sarcină liniară de lungime finită

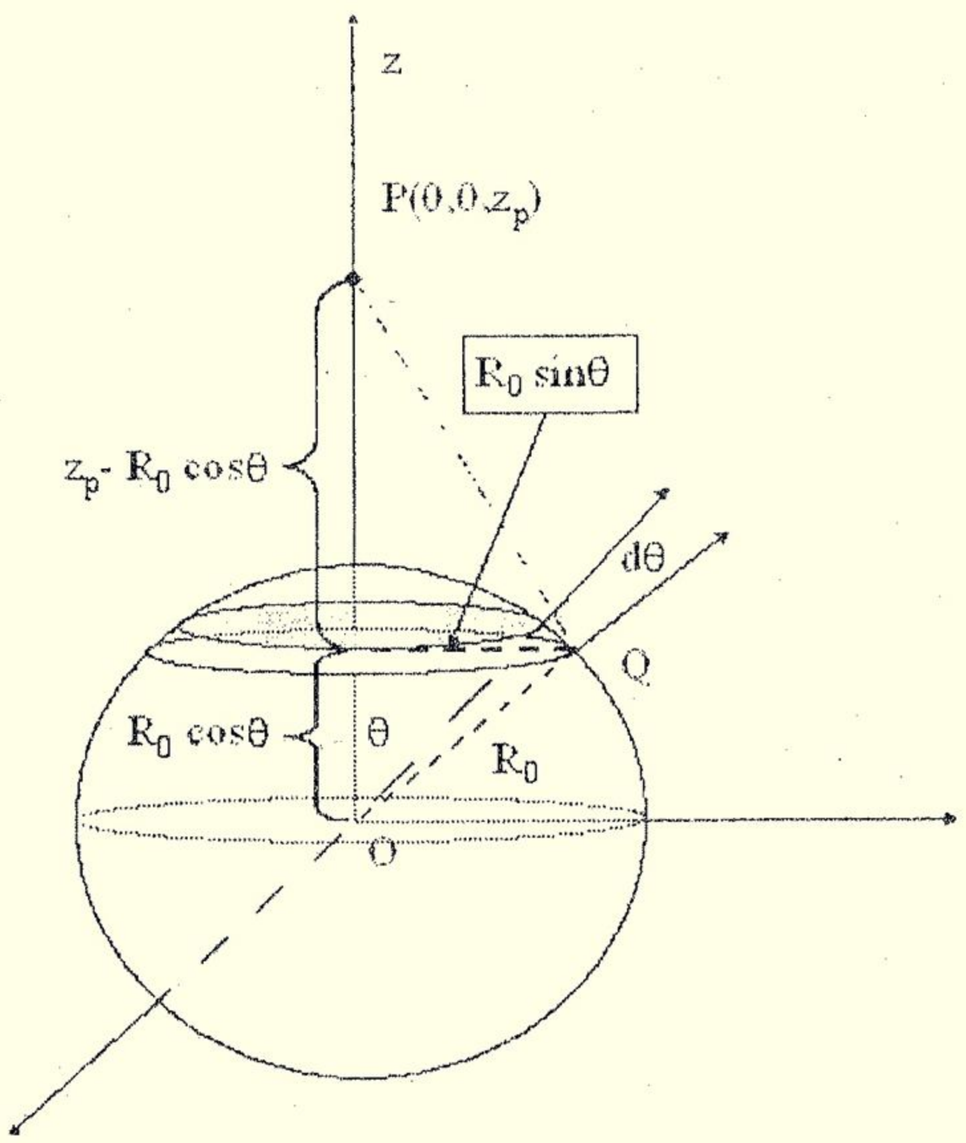


Figura 1.38: Problema 2. Distribuţie sferică superficială de sarcină neuniformă

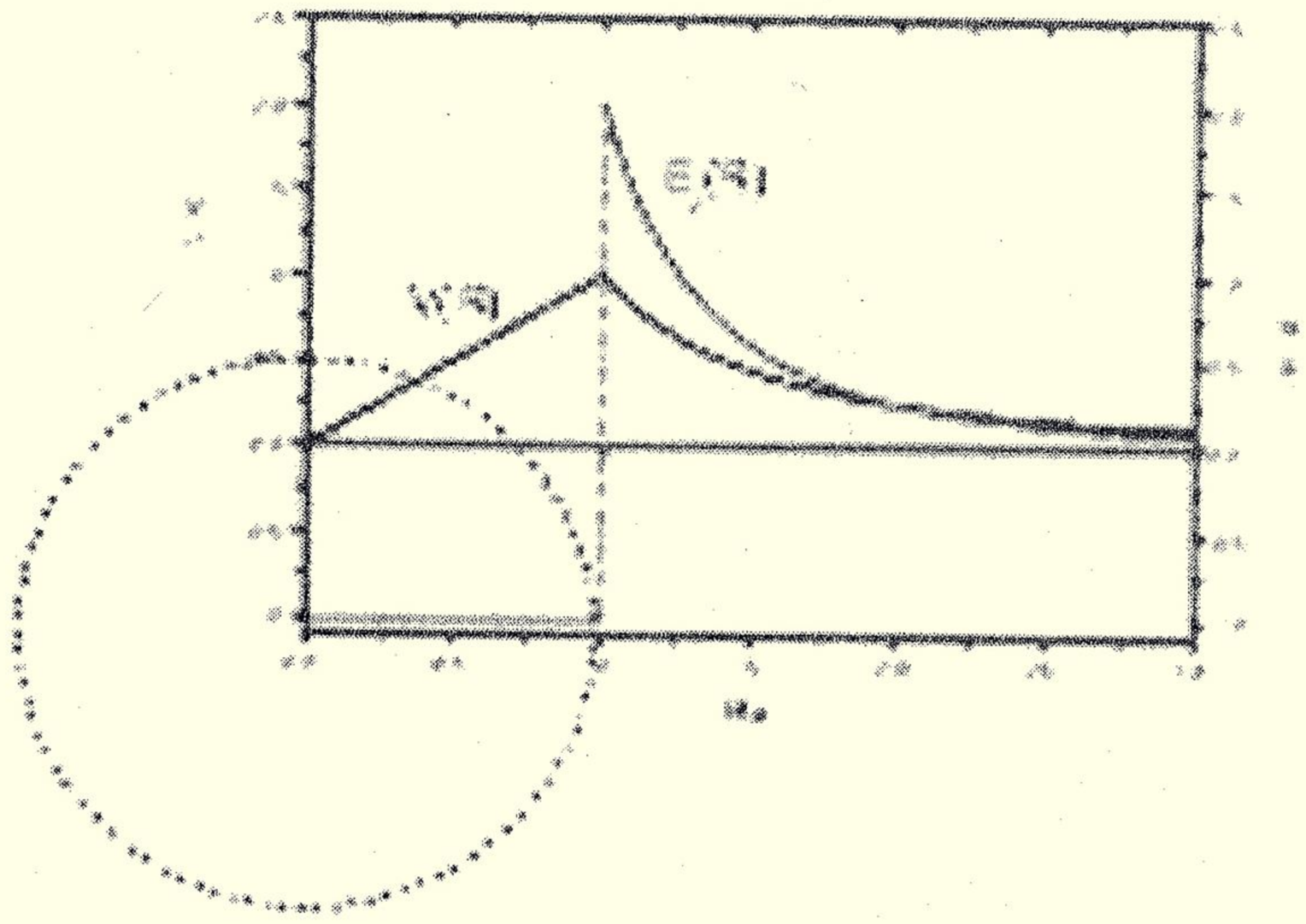


Figura 1.39: Problema 2. Câmpul şi potenţialul

5. Calculaţi câmpul creat de un sistem format din două distribuţii plane uniforme de sarcina, egale ca densitate şi de semne contrare.

6. Identificaţi care dintre aceste două câmpuri nu este electrostatic:

a) $\vec{E} = A(xy\vec{i} + 2yz\vec{j} + 3xz\vec{k})$

sau

b) $\vec{E} = A(y^2\vec{i} + (2xy + z^2)\vec{j} + 2yz\vec{k})$.

Răspunsuri

2.

$$V(R) = \begin{cases} \frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0} z, z \leq R_0 \\ \frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0} \frac{R_0^3}{z^2}, z > R_0 \end{cases} \quad E_z(z) = \begin{cases} \frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0}, z \leq R_0 \\ \frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0} \frac{2R_0^3}{z^3}, z > R_0 \end{cases}$$

3. $\vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{a}$

4. Suprafeţele echipotenţiale sunt cilindrice (vezi figura)

5. Câmp uniform în spaţiul dintre cele două distribuţii ($E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$) şi zero în restul spaţiului.

6. a)

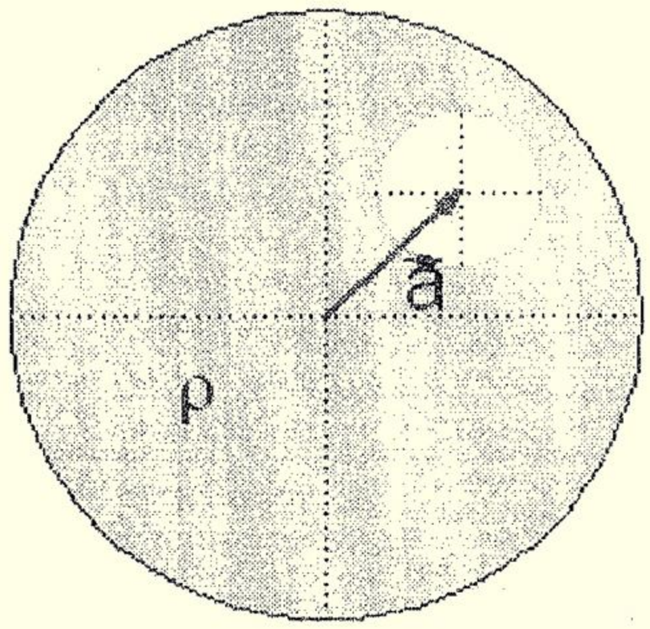


Figura 1.40: Problema 3

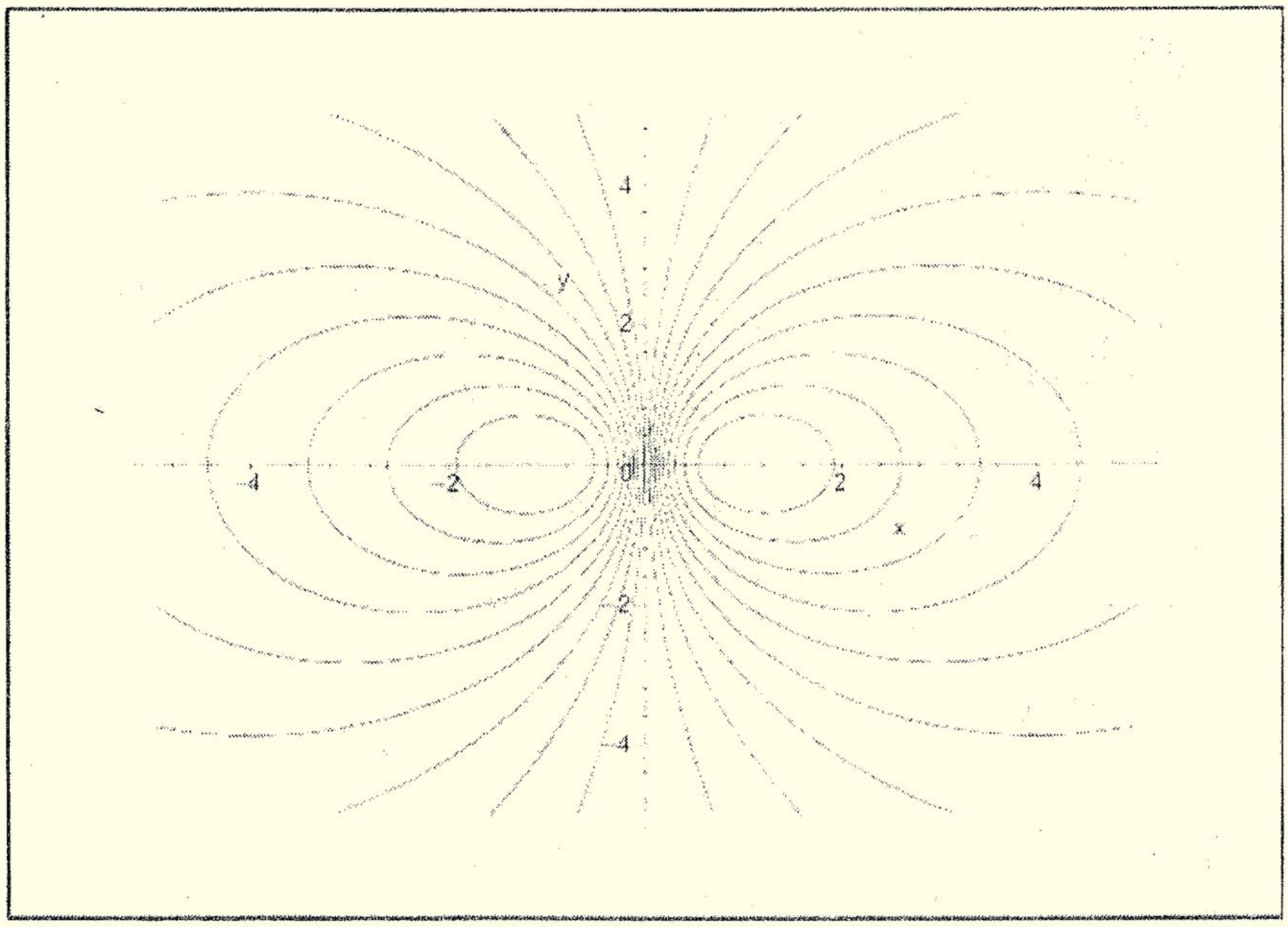


Figura 1.41: Problema 4

vid

Capitolul 2

Conductori în echilibru electrostatic

În conductori, anumiţi electroni din învelişul electronic exterior al atomilor constituenţi, numiţi electroni liberi, execută mişcări dezordonate a căror rezultantă este nulă în absenţa unor factori exteriori perturbatori. În prezenţa unui câmp electric, fiecare electron sau purtător elementar de sarcină q, fiind supus forţei $\vec{F} = q\vec{E}$, va participa la o mişcare de ansamblu, ordonată, deci la un curent de sarcini, sau simplu, un curent electric. De aici, noţiunea de conductor electric atribuită în general mediilor în care, sub acţiunea forţelor electrice, se produce o mişcare de ansamblu a sarcinilor electrice mobile. În acest capitol, nu avem în vedere acest fenomen electrocinetic, ci numai fenomenele electrostatice în care sarcinile mobile din conductor, se află în permanenţă în echilibru electrostatic.

2.1 Experienţe fundamentale

În cele ce urmează prezentăm o serie de experimente care pun în evidenţă proprietăţi electrice generale ale conductorilor în echilibru electrostatic:

a) Un tub cilindric conductor A, aşezat pe un suport izolator, este încărcat cu ajutorul unui corp de probă P care poartă o sarcină electrică. Corpul de probă, constituit dintr-un mic disc metalic (sau o sferă) fixat la extremitatea unei baghete din material izolant, este adus în contact cu cu cilindrul, pe faţa interioară a acestuia (Fig. 2.1). Apoi, corpul de probă este scos din cilindru şi adus în contact cu electroscopul. Se constată că foiţele acestuia nu

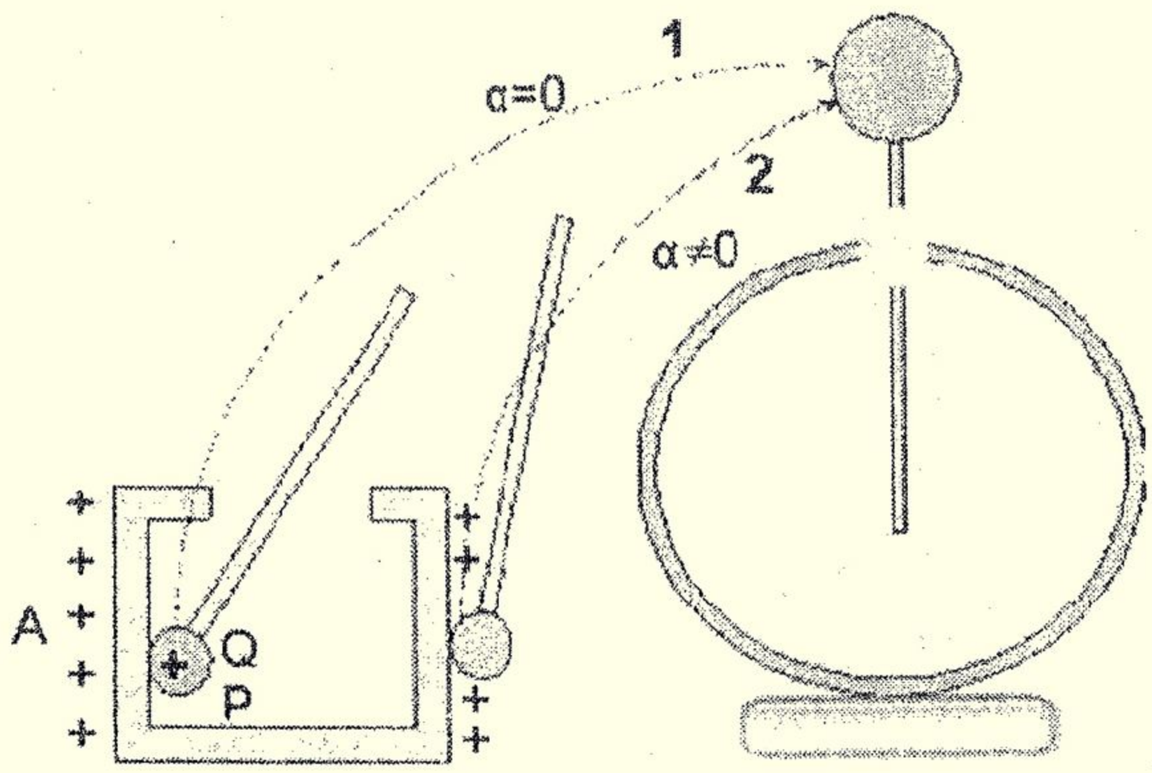


Figura 2.1: Repartiţia sarcinilor pe un cilindru conductor

deviază, fapt care probează că sarcina electrică nu a rămas pe faţa interioară a cilindrului. Acum descărcăm corpul de probă, şi îl punem în contact cu suprafaţa exterioară a cilindrului şi, din nou, îl aducem în contact cu electroscopul. Se va observa o deviaţie a foiţelor acestuia, fapt care atestă că sarcina comunicată cilindrului pe faţa interioară s-a repartizat numai pe suprafaţa exterioară. Dacă încărcăm din nou conductorul cilindric, dar de data aceasta comunicându-i sarcina pe suprafaţa sa exterioară, şi apoi prelevăm succesiv sarcini de pe suprafeţele interioară şi exterioară ale cilindrului cu ajutorul corpului de probă, constatăm acelaşi fapt: sarcina se răspândeşte numai pe suprafaţa exterioară a cilindrului conductor. În concluzie, *o sarcină Q comunicată unui conductor într-un mod oarecare, fie în interiorul lui fie pe suprafaţă, se repartizează numai pe suprafaţa exterioară a acestuia. În cazul conductorilor sarcina este în exclusivitate superficială.*

Deoarece corpul de probă în contact cu suprafaţa interioară a conductorului nu se poate electriza, deducem că densitatea de sarcină este nulă în interior. Acest fapt sugerează că *în interiorul conductorilor câmpul electric este nul.*

b) Un cilindru conductor A, ale cărui extremităţi au, de o parte, forma de con şi de cealaltă, forma de calotă sferică, (Fig.2.2), este susţinut pe un suport izolator. Mai întâi se comunică acestui conductor o sarcină electrică. Apoi, cu ajutorul unui corp de probă care este adus pe rând în contact cu conductorul în punctele (1), (2) şi (3) situate în zone ale căror raze de curbură sunt din ce în ce mai mici, se prelevează sarcini care sunt transportate

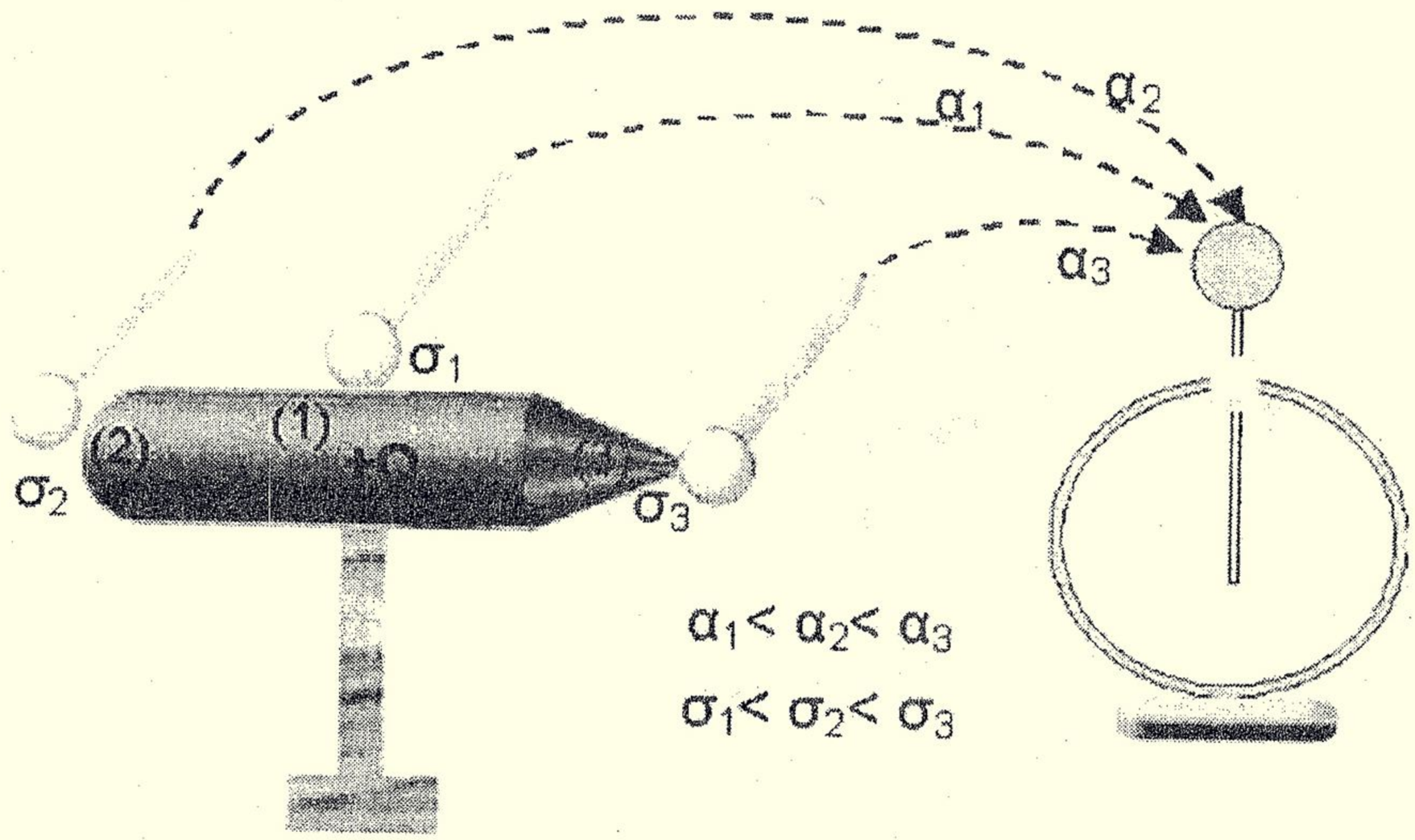


Figura 2.2: Repartiţia sarcinilor pe suprafaţa unui conductor neuniform. Dependenţa densităţii superficiale de curbura suprafeţei

succesiv la electroscop. De fiecare dată când se pune din nou în contact cu cilindrul, corpul de probă trebuie să fie în prealabil descărcat. Se constată că deviaţiile observate la electroscop sunt succesiv crescătoare, $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$, fapt care dovedeşte *că sarcina comunicată unui conductor a cărui suprafaţă prezintă neuniformităţi, (curburi diferite) se repartizează neuniform pe suprafaţa acestuia. Densitatea de sarcină este cu atât mai mare cu cât raza de curbură a suprafeţei conductorului este mai mică (sau cu cât curbura suprafeţei este mai mare)*

c) Conductorul utilizat în experimentul precedent este încărcat cu o sarcină Q; apoi, un corp de probă legat la electroscop prin intermediul unui fir conductor (Fig. 2.3) este adus în contact permanent cu conductorul, fiind plimbat succesiv prin aceleaşi zone (1), (2) şi (3) explorate în experimentul precedent. Se constată că deviaţia foiţelor este constantă cu toate că repartiţia sarcinilor pe această suprafaţă este neuniformă ($\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$). *Analogie cu lichidele din vasele comunicante*: Cantităţile de lichid, deşi diferite, se află în echilibru hidrostatic la acelaşi nivel electroscopului, aflat în contact electric permanent cu conductorul încărcat, rămâne constantă pentru toate aceste zone, ($\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$), cu toate că, aşa cum s-a constatat în experimentul precedent, în aceste zone densităţile de sarcină sunt diferite. Este

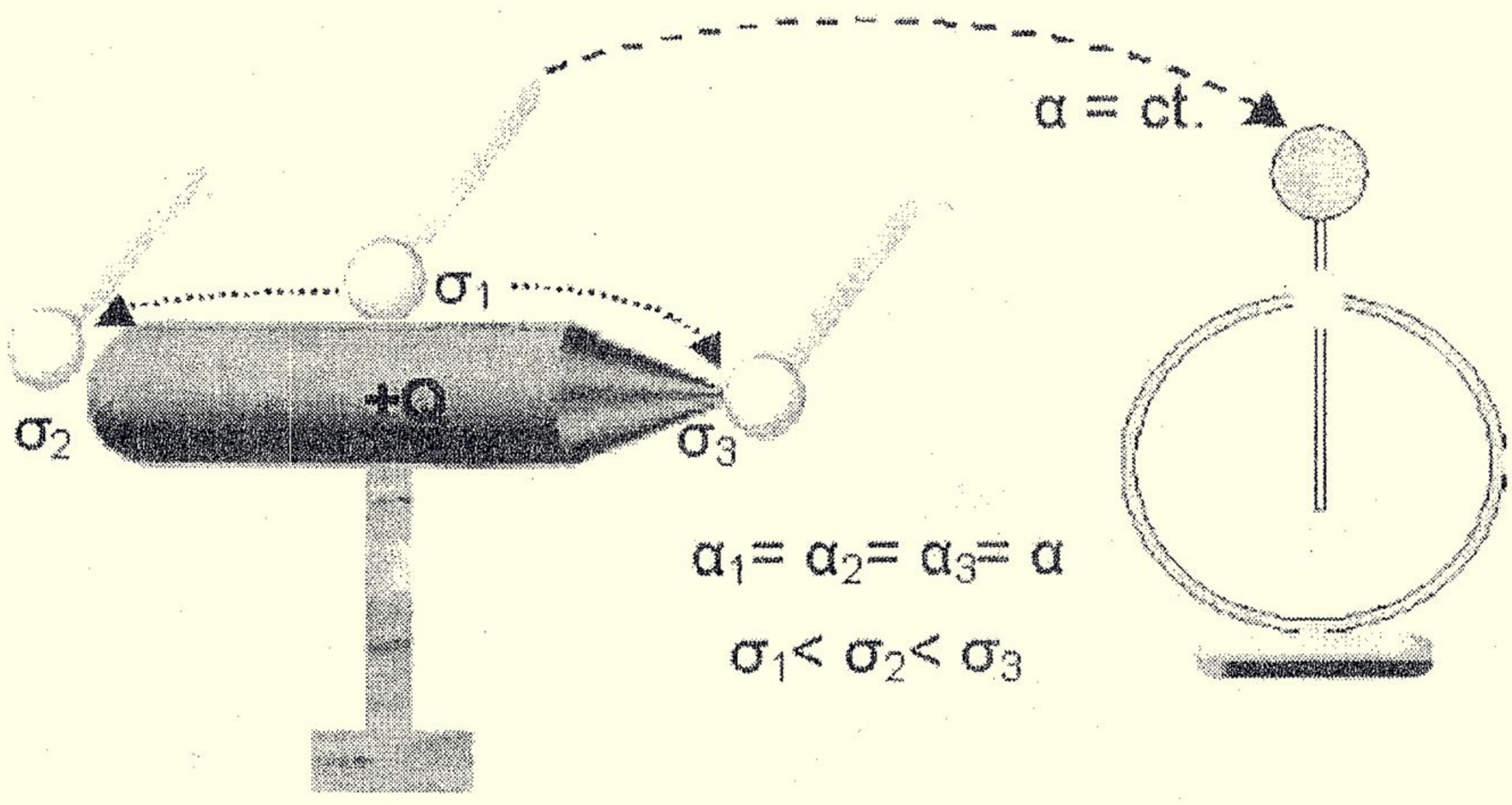


Figura 2.3: Suprafaţa conductorului încărcat este o echipotenţială: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$

logic să admitem că acest fapt este posibil numai dacă nu există o diferenţă de potenţial care să favorizeze deplasarea acestor sarcini între electroscop şi diferitele zone de pe conductor. În concluzie, *suprafaţa conductorului este o suprafaţă echipotenţială, ($V_S = const$).* Sarcinile superficiale, deşi se repartizează neuniform pe suprafaţa conductorului, densitatea superficială fiind dependentă de curbura suprafeţei acestuia, ele nu tind să se deplaseze pentru a se repartiza uniform ci rămân în echilibru pe conductor. Fenomenul este asemănător echilibrului lichidelor în vasele comunicante: în vase comunicante cu secţiuni diferite, cantităţile de lichid, deşi diferite, se află la aceeaşi înălţime faţă de suprafaţa Pământului considerată ca nivel de referinţă pentru înălţime. Analog, pe conductori, cantităţi de electricitate, deşi diferite, se află la acelaşi potenţial în raport cu potenţialul Pământului considerat ca referinţă $V = 0$. Deci, în general, *pe conductori sarcinile electrice se află în echilibru electrostatic.*

2.2 Câmpul şi potenţialul electric al conductorilor în echilibru electrostatic

Condiţia ca sarcinile mobile din interiorul conductorului să fie în echilibru electrostatic este ca rezultanta forţelor care acţionează asupra fiecărei

sarcini să fie nulă $\vec{F} = 0$, fapt care implică

$$\vec{E}_{int} = 0. \tag{2.1}$$

Această proprietate interpretează faptele experimentale puse în evidenţă în secţiunea precedentă. Efectiv, sarcinile comunicate peretelui interior al cilindrului conductor se resping între ele până la limită, la suprafaţa exterioară, unde rămân în echilibru electrostatic $\left(\vec{F} = 0\right)$ şi astfel. în interior $\vec{E}_{int} = 0$. Pe de altă parte, în virtutea ecuaţiei lui Poisson, $div\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$, deducem că în interiorul conductorului în echilibru electrostatic

$$\rho = 0 \tag{2.2}$$

fapt care interpretează de asemenea rezultatul experimentului descris în §3.1.a. În interiorul conductorului în echilibru electrostatic nu există sarcină volumică. Efectiv sarcinile pozitive şi negative se compensează. Potenţialul în interiorul conductorului este constant. Într-adevăr, pentru $E_{int} = 0$, relaţia dintre câmpul şi potenţialul electrostatic $\vec{E} = -gradV$, sau $dV = -\vec{E} \cdot \vec{dl}$, dă $dV = 0$ sau

$$V_{int} = const. \tag{2.3}$$

Având în vedere proprietatea de continuitate a potenţialului la trecerea printr-o distribuţie de sarcină superficială, cum este ea în cazul oricărui conductor încărcat electric, se poate deduce imediat că $V_{int} = V_s = const.$

2.3 Câmpul şi potenţialul electric la suprafaţa conductorului

Din motivul enunţat mai înainte, potenţialul la suprafaţa unui conductor este constant

$$V_s = V_{int} = const. \tag{2.4}$$

Deci suprafaţa oricărui conductor în echilibru electrostatic este o suprafaţă echipotenţială. În virtutea relaţiei dintre câmp şi potenţial, această proprietate implică o circulaţie nulă a câmpului pe suprafaţa conductorului:

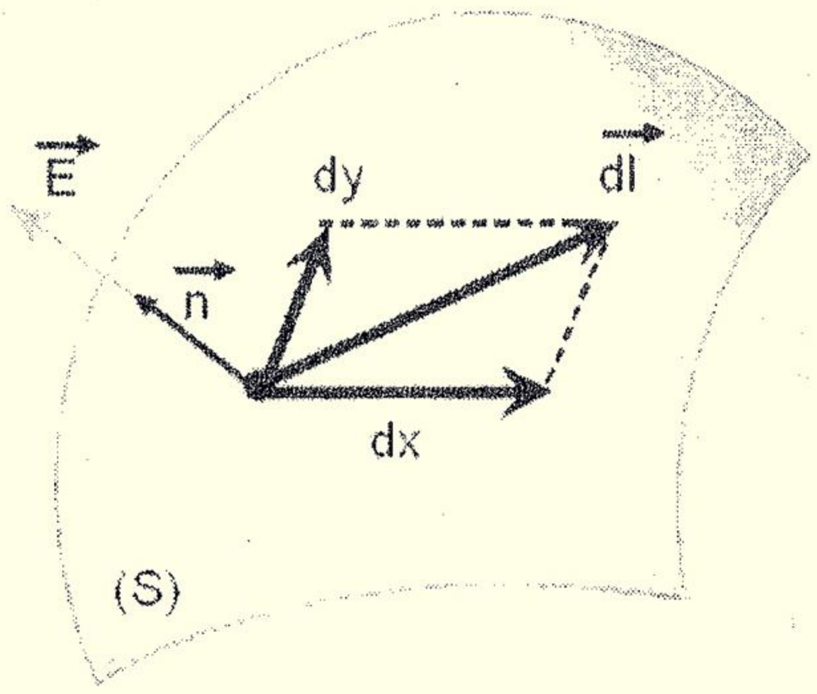


Figura 2.4: Câmpul electric este totdeauna perpendicular pe suprafaţa conductorului

$$\vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} = 0 \tag{2.5}$$

Altfel spus, $\vec{E}$ este perpendicular pe $\overrightarrow{dl}$. Dacă $\overrightarrow{dl}$ este un element de drum de pe suprafaţa conductorului, (Fig. 2.4), câmpul electric va fi perpendicular pe planul format de componentele carteziene dx şi dy ale acestui drum elementar. Deci *în orice punct al suprafeţei conductorului câmpul electric este perpendicular pe suprafaţă.* Această proprietate a fost deja enunţată în capitolul precedent ca o regulă generală, privind topografia liniilor de câmp electric şi a suprafeţelor echipotenţiale. Potrivit acestei reguli câmpul electric este totdeauna perpendicular pe suprafeţele echipotenţiale.

2.4 Câmpul electric în vecinătatea suprafeţei unui conductor încărcat (Teorema lui Coulomb)

Un raţionament simplu ne conduce la definirea cîmpului în vecinătatea suprafeţei unui conductor. Sarcina electrică a unui conductor fiind numai superficială şi având densitatea σ, problema determinării câmpului în vecinătatea suprafeţei conductorului poate fi rezolvată invocând proprietatea de discontinuitate a câmpului electric $\vec{E}$ la traversarea normală a unei distribuţii superficiale de sarcină σ şi anume: $\overrightarrow{n} \cdot \left[\overrightarrow{E}_{(+)} - \overrightarrow{E}_{(-)}\right] = \sigma/\varepsilon_0$.

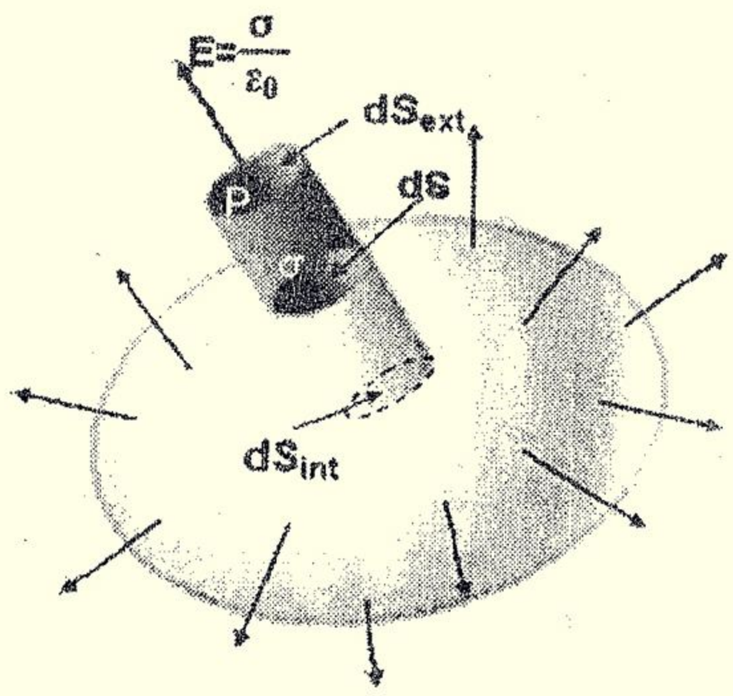


Figura 2.5: Câmpul electric în vecinătatea suprafeţei unui conductor încărcat

Dar, deoarece în cazul conductorilor câmpul electric în interior este nul, $\vec{E}_{(-)} = \vec{E}_{int} = 0$, se poate deduce că în exteriorul conductorului câmpul electric este $\vec{n} \cdot \vec{E}_{(+)} = \vec{n} \cdot \vec{E}_{ext} = \sigma/\varepsilon_0$. Este de presupus că pe suprafaţa conductorului câmpul electric ar avea valoarea medie

$$\vec{n} \cdot \vec{E}_S = \frac{1}{2}\vec{n} \cdot \left(\vec{E}_{ext} - \vec{E}_{int}\right) = \frac{1}{2}\left(0 + \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}. \tag{2.6}$$

Teorema lui Coulomb pe care o vom prezenta în cele ce urmează, afirmă că, într-adevăr, *câmpul electric în vecinătatea unui conductor încărcat electric este egal cu* σ/ε_0. Considerăm un element de suprafaţă dS de pe suprafaţa conductorului încărcat cu sarcina de densitate σ (Fig. 2.5). Acest element este suficient de mic pentru ca liniile de câmp electric ce pornesc de suprafaţa lui să fie paralele între ele. În acest fel tubul de linii de câmp care se sprijină pe conturul elementului dS, prelungit în interiorul conductorului şi având suprafeţele extreme $dS_{int} = dS_{ext} = dS$, va constitui o suprafaţă închisă care conţine în interiorul său sarcina $dQ = \sigma dS$. Câmpul în punctul P aflat pe suprafaţa dS_{ext} din vecinătatea conductorului poate fi determinat, aplicând teorema lui Gauss:

$$d\Phi = \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS}_{int} + \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS}_{later} + \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS}_{ext} = \frac{dQ}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma dS}{\varepsilon_0} \tag{2.7}$$

Dar, $\vec{E} \cdot \overrightarrow{dS}_{int} = 0$ deoarece în interiorul conductorului $\vec{E} = 0$. În plus $\vec{E} \cdot \overrightarrow{dS}_{later} = 0$ fiindcă vectorul $\vec{E}$ şi versorul suprafeţei laterale $\vec{n} = \overrightarrow{dS}_{later}/dS_{later}$

sunt perpendiculare şi, deoarece $dS_{ext} = dS$, formula precedentă se reduce la

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \tag{2.8}$$

Această formulă (2.8) exprimă **teorema lui Coulomb** *potrivit căreia, în vecinătatea unui conductor încărcat câmpul electric este egal cu* σ/ϵ_0 . Această teoremă (2.8) poate fi formulată şi altfel, ţinând seama de faptul că, în vecinătatea suprafeţei conductorului încărcat, câmpul electric este $\vec{E} = -gradV$ sau $E = -(\partial V/\partial n)$, în care $\partial V/\partial n$ este derivata potenţialului în direcţia normalei la suprafaţa conductorului:

$$\sigma = -\varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial n}. \tag{2.9}$$

În această formă, (2.9) *teorema lui Coulomb permite să se calculeze sarcina electrică, dacă este cunoscută repartiţia potenţialelor.* Observăm totodată şi aici că *potenţialele descresc plecând de la sarcinile pozitive de unde ies liniile de câmp electric.* Teorema lui Coulomb, scrisă sub forma

$$\sigma dS = dQ = \varepsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{S} = \vec{D} \cdot d\vec{S}, \tag{2.10}$$

valabilă în vecinătatea conductorului unde vectorii $\vec{E}$ şi $\vec{dS}$ sunt paraleli, mai precizează faptul că fluxul vectorului $\vec{D}\left(=\varepsilon_0\vec{E}\right)$ trimis de conductorul încărcat într-un tub de linii de câmp este egal cu sarcina aflată pe conductor în acest tub. Dacă se consideră punctul P ca fiind localizat chiar pe suprafaţa dS de pe conductor, (Fig. 2.5) câmpul electric la suprafaţa conductorului va fi $E_S = \sigma/2\varepsilon_0$. Intr-adevăr procedând în aceeaşi manieră ca în cazul precedent, cu deosebirea că suprafeţele terminale ale tubului de linii de câmp care alcătuiesc suprafaţa Gauss elementară sunt de data acesta dS_{int}, dS_{later} şi dS. În acest caz teorema lui Gauss se scrie:

$$d\Phi = \vec{E} \cdot \vec{dS}_{int} + E \cdot \vec{dS}_{later} + \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{dQ}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma dS}{2\varepsilon_0} \tag{2.11}$$

şi, din motivele arătate mai înainte, această ecuaţie se reduce la:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = E_S \tag{2.12}$$

Această formulă (2.12) reprezintă câmpul electric într-un punct situat pe suprafaţa conductorului. Dar acest câmp nu poate să provină de la sarcina

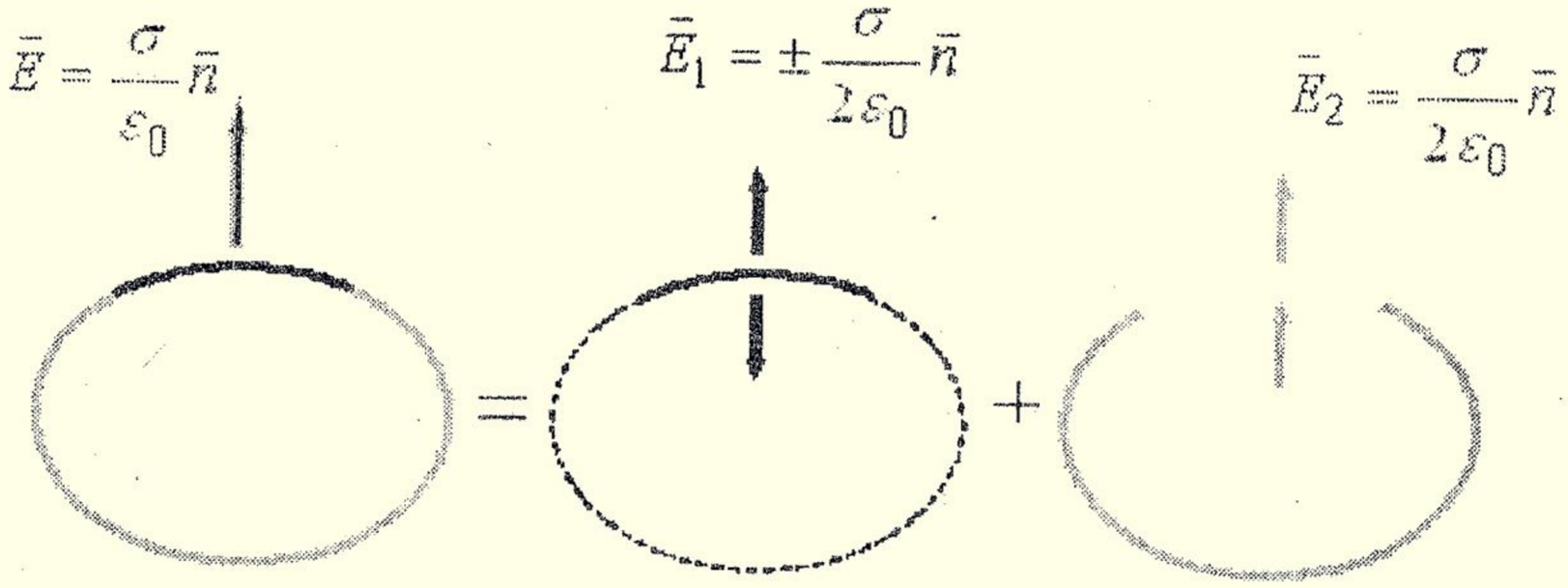


Figura 2.6: Identificarea câmpurilor din interiorul şi din exteriorul conductorului prin metoda superpoziţiei

dQ aflată chiar pe elementul de suprafaţă dS considerat, ci este datorat sarcinilor de pe conductor repartizate pe restul suprafeţei conductorului, în exteriorul suprafeţei dS. Pentru a preciza mai bine acest fapt, vom analiza situaţia câmpurilor în exteriorul şi în interiorul unui conductor încărcat cu sarcina Q, aplicând o metodă de superpoziţie. Vom considera starea electrică în interiorul şi în exteriorul conductorului (Fig. 2.6), ca fiind echivalentă cu suma stărilor corespunzătoare, pe de o parte elementului de suprafaţă dS ca şi cum ar fi decupat din conductor şi ar purta sarcina sa $dQ = \sigma dS$ şi, pe de altă parte, conductorului fără elementul de suprafaţă dS şi purtând restul sarcinilor.

Notăm cu $\vec{E}_1$ câmpul creat de sarcina superficială de pe elementul de suprafaţă $\overrightarrow{dS} = \vec{n}dS$ considerat izolat, şi cu $\vec{E}_2$ câmpul datorat sarcinilor rămase pe restul conductorului. În timp ce câmpul $\vec{E}_1$ este discontinuu la traversarea suprafeţei dS, câmpul $\vec{E}_2$ este continuu la traversarea prin aceeaşi suprafaţă. Ecuaţiile câmpului la exteriorul, interiorul şi la suprafaţa conductorului se deduc din echivalenţa stărilor electrice corespunzătoare conductorului întreg şi conductorului decupat (Fig. 2.6):

$$\overrightarrow{E}_{ext} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\overrightarrow{n} + \overrightarrow{E}_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\overrightarrow{n} \tag{2.12}$$

$$\overrightarrow{E}_{int} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\overrightarrow{n} + \overrightarrow{E}_2 = 0$$

$$\vec{E}_S = 0 + \vec{E}_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{n}$$

Este evident că $\vec{E}_S$ este câmpul datorat în exclusivitate sarcinilor aflate în exteriorul suprafeţei infinitezimale dS care înconjoară punctul P considerat pe conductor.

Remarcă: Câmpul total $\vec{E}_{ext}$ într-un punct în apropierea suprafeţei conductorului încărcat cu sarcini electrice este pe jumătate datorat elementului de sarcină σdS, celalată jumătate fiind datorată sarcinilor de pe restul conductorului, respectiv sarcinilor distribuite în exteriorul elementului de suprafaţă dS.

2.5 Presiune electrostatică

Pentru a sugera la ce se referă noţiunea de *presiune electrostatică* este suficient să observăm că sarcina infinitezimală $dQ = \sigma dS$ de pe elementul de suprafaţă dS de pe conductor se află în câmpul electric $\vec{E}_2 = \vec{E}_S = \vec{n}\sigma/2\varepsilon_0$ al tuturor sarcinilor exterioare elementului de suprafaţă dS. Asupra sarcinii dQ se exercită forţa

$$d\vec{F} = \vec{E}_S dQ = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\vec{n}dS$$

Această forţă, dirijată perpendicular pe elementul de suprafaţă dS, creează o presiune asupra sarcinii dQ

$$p = \frac{dF}{dS} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} \tag{2.13}$$

Presiunea electrostatică p nu depinde de semnul sarcinii, ea este normală la suprafaţa conductorului şi este dirijată totdeauna către exteriorul suprafeţei. Fiind *proporţională cu pătratul densităţii de sarcină*, această presiune este în general mai mare în regiunile cu rază de curbură mai mică, deoarece densitatea superficială σ este invers proporţională cu raza de curbură a suprafeţei. Dacă suprafaţa conductorului ar fi deformabilă, efectul presiunii electrostatice ar fi vizibil, aceasta având tendinţa să mărească suprafaţa. În cazul lichidelor conductoare această presiune se opune forţelor de capilaritate care tind să diminueze suprafaţa, favorizând astfel o pulverizare mai fină a lichidelor, ca de exemplu în cazul vopsirii sau în cazul pulverizării lichidelor insecticide.

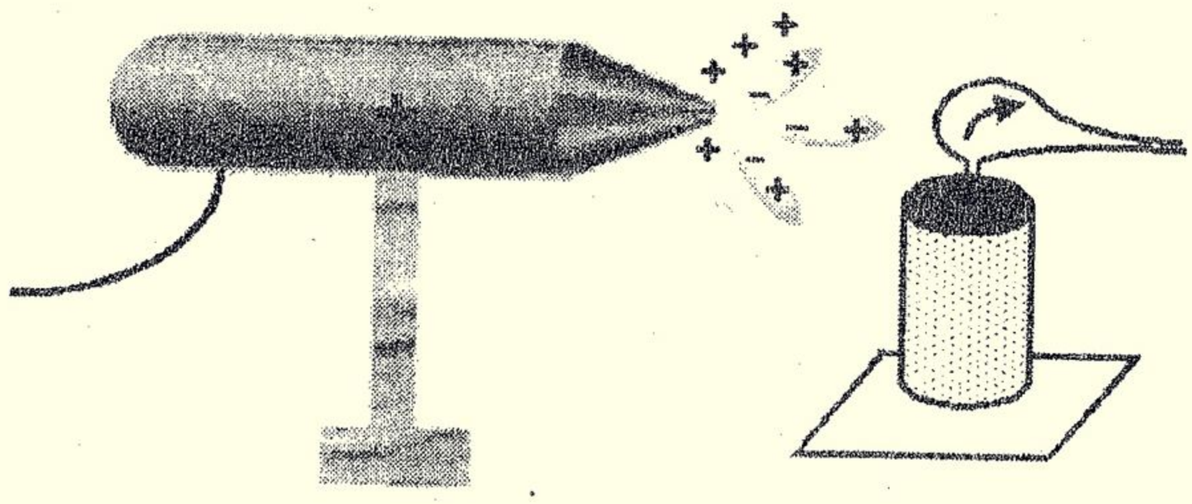


Figura 2.7: Vântul ionic produs în vecinătatea vârfurilor de pe suprafaţa unui conductor încărcat

În cazul conductorilor metalici în echilibru electrostatic, care prezintă regiuni ascuţite, (Fig. 2.7) presiunea la vârfuri este foarte mare (teoretic infinită) şi implicit câmpul $E_S = \sigma/2\varepsilon_0$ este foarte intens. Din acest motiv în regiunile ascuţite au loc procese complicate. Sub acţiunea câmpului electric moleculele neutre de gaz din vecinătatea vârfurilor care poartă o sarcină pozitivă, pot să capete o polarizaţie indusă comportîndu-se ca dipoli electrici. Aceştia se aliniază în direcţia câmpului cu polul $(-)$ către vârf, fiind atraşi de acesta. Fluxul de dipoli descarcă vârful, iar sarcina pozitivă a dipolilor, rămasă necompensată, este respinsă. În consecinţă, de la vârf se produce în exterior un flux de particule purtătoare de sarcină care capătă viteze mari în câmpul $\vec{E}_S$, constituind un adevărat "vânt electric". Acesta poate să antreneze în direcţia sa flacăra unei lumânări adusă în vecinătatea vârfului. Modelul pentru explicaţia vântului electric este de fapt mai complicat deoarece câmpurile foarte intense din vecinătatea vârfurilor provoacă fenomene de ionizare a moleculelor de aer dând naştere la ioni pozitivi şi negativi. Forţa $d\vec{F}$ care se exercită la vârfuri asupra electronilor din conductor tinde să-i scoată în exteriorul suprafeţei şi să-i accelereze. Electronii expulzaţi vor căpăta viteze suficient de mari pentru ca, în momentul impactului cu moleculele de gaz, să le smulgă noi electroni. Aceştia, la rândul lor, vor antrena, în urma şocurilor repetate, crearea rapidă de noi ioni în vecinătatea vârfului. Ionii de semn contrar cu cel al sarcinii de pe conductor se vor descărca la contactul cu conductorul, în timp ce ionii de acelaşi semn vor fi respinşi dând astfel naştere unui curent de aer ionizat "vânt electric" care poate să curbeze flacăra unei lumânări. In aceeaşi manieră se explică punerea în mişcare de rotaţie a unei morişti electrostatice, constituite din conductori uşori ale căror extremităţi sunt ascuţite şi îndoite în acelaşi sens (Fig. 2.8)

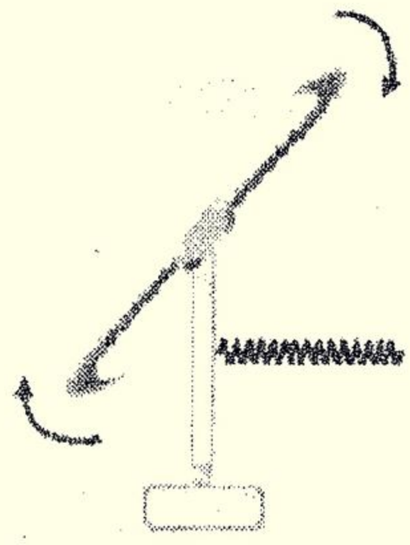


Figura 2.8: Morişca electrostatică

Se înţelege astfel de ce conductorii încărcaţi pot să piardă uşor sarcina care le-a fost comunicată dacă suprafeţele lor prezintă asperităţi, vîrfuri, sau muchii ascuţite. Din acest motiv pentru repetabilitatea fenonenelor puse în evidenţă în cadrul experimentelor demonstrative de electrostatică este important ca suprafeţele conductorilor utilizaţi în aceste experimente să fie şlefuite pentru a fi debarasate de aceste surse de pierdere de sarcină. Efectele electrice pe care le implică forma conductorului, puse în evidenţă în experimentele prezentate anterior pot fi relevate relativ uşor în câteva exemple:

1. Descărcarea unui conductor electrizat prin legare la Pământ. Să examinăm cazul a două sfere cu suprafeţele S şi s ale căror raze sunt R şi r şi care au sarcinile Q şi q. Presupunem că $R > r$ şi că sferele sunt foarte depărtate una faţă de cealaltă. (Fig. 2.8). Potenţialele lor sunt respectiv

$$V_R = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R} \quad \text{şi} \quad V_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}.$$

Dacă unim cele două sfere printr-un fir conductor potenţialele lor vor fi egale $V_R = V_r$, fapt care ne permite să scriem următoarea relaţie:

$$\frac{Q}{R} = \frac{q}{r}$$

Cu $Q = 4\pi R^2\sigma_R$ şi $q = 4\pi r^2\sigma_r$ se deduce că

$$\frac{\sigma_R}{\sigma_r} = \frac{r}{R} \tag{2.14}$$

Densităţile superficiale sunt invers proporţionale cu razele de curbură, aşa cum s-a dedus din experimentele descrise anterior.

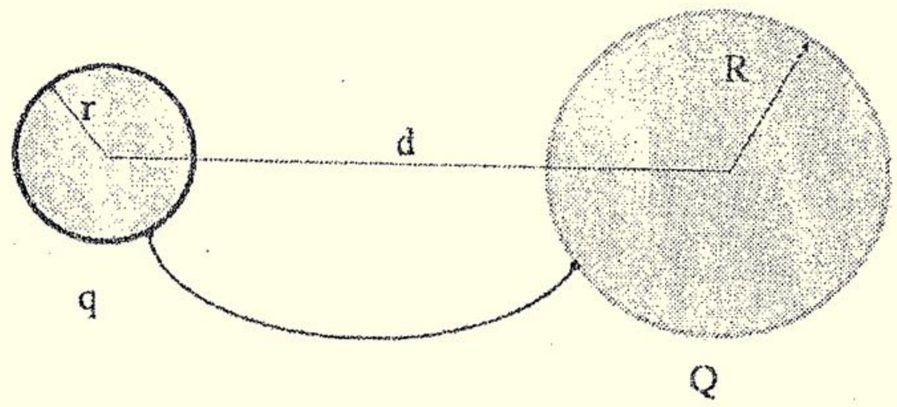


Figura 2.9: Repartiţia sarcinilor pe două sfere cu raze diferite: Sfera din dreapta are raza R şi este încărcată cu sarcina Q, cea din stânga are raza r şi sarcina q. $(d >> r, R)$

Se explică totodată faptul că sarcina unui conductor, care este legat la sol, se scurge practic în întregime în sol, deoarece raza Pământului ($R \approx 6400km$) este foarte mare în comparaţie cu dimensiunile oricărui conductor încărcat care poate fi utilizat într-un experiment obişnuit

Efectul Corona. Acesta este un efect care poate fi observat sub formă de efluvii luminoase. Acestea apar în anumite condiţii în vecinătatea conductorilor aflaţi la tensiune foarte înaltă. Să definim mai întâi un câmp electric maxim care poate exista în vecinătatea unui conductor, fără ca să aibă loc un fenomen de ionizare a aerului, deci fără scurgere se sarcină de pe conductor. Acest câmp electric este numit câmp disruptiv. În cazul aerului sec câmpul disruptiv este de aproximativ 3 MV/m. Să considerăm o linie de înaltă tensiune la care conductorul se află la potenţialul V_0 şi are o formă cilindrică de rază a. În virtutea celor discutate în cazul distribuţiei de sarcină cilindrică, expresiile potenţialului şi a câmpului electric radial, la distanţa R de axa conductorului, sunt:

$$V = \frac{V_0}{ln(a)} ln(R) \qquad \text{şi} \qquad E_R = -\frac{V_0}{ln(a)} \frac{1}{R} \tag{2.14}$$

Pentru $R = a$ câmpul electric pe fir, E_R, are valoarea maximă $|E_R| = \frac{V_0}{ln(a)} \frac{1}{a}$. Efectul corona poate să apară pe linia de înaltă tensiune numai în cazul în care câmpul disruptiv E_D este mai mare decât $|E_R|$. De exemplu cu $E_D = 3$ MV/m efectul corona poate să apară când linia este la potenţialul $V_0 = 110$ kV dacă diametrul firului este mai mic de 1,6 cm, sau poate să apară la potenţialul $V_0 = 220$ kV când diametrul firului este mai mic de 3,5 cm.

2.6 Fenomene de influenţă electrostatică

Sarcina electrică poate fi comunicată unui conductor nu numai prin contact cu un alt corp electrizat, ci şi prin influenţă. Dacă un conductor (A), care poartă o sarcină electrică pozitivă, (Fig. 2.10), este adus în apropierea unui alt conductor (B) izolat, câmpul electric $\vec{E}_0$ al sarcinii de pe conductorului (A) va deplasa sarcinile mobile, electronii, de pe conductorul (B) în sensul opus lui $\vec{E}_0$, către conductorul (A). Această deplasare de sarcini încetează când este atins echilibrul electrostatic. Datorită excesului de electroni, conductorul (B) va căpăta o sarcină negativă la extremitatea apropiată de conductorul (A). La cealaltă extremitate se va separa pe conductor o sarcină pozitivă datorată deficitului de electroni care s-au deplasat către (A) în câmpul E_0. Acest fapt poate fi demonstrat experimental, utilizând un electroscop şi un corp de probă. Sarcinile prelevate cu ajutorul corpului de probă de la cele două extremităţi ale conductorului şi duse succesiv la electroscopul în prealabil încărcat cu o sarcină pozitivă vor cauza, o micşorare a deviaţiei acestuia dacă sarcina a fost prelevată la extremitatea apropiată de conductorul (A), si o creştere a deviaţiei dacă sarcina a fost luată de pe partea opusă. Acest fenomen de producere a sarcinilor electrice pe conductorul (B) prin influenţă electrostatică are loc indiferent dacă iniţial existau sau nu sarcini electrice pe conductor. Dacă se îndepărtează conductorul (A) suficient de mult, echilibrul electrostatic al sarcinilor mobile de pe conductorul (B) se modifică, revenind în final la starea electrică iniţială. În concluzie, *un câmp electric ale cărui surse se află în exteriorul unui conductor, creează pe conductor sarcini electrice prin influenţă.*

2.7 Conductori situaţi în câmp electric uniform

1. Influenţă electrostatică în cazul unui conductor izolat

Un conductor, iniţial neutru, este plasat într-un câmp electric uniform $\vec{E}_0$ ale cărui surse se află în exteriorul conductorului (Fig. 2.11). Pe suprafaţa conductorului se vor separa, prin influenţă, sarcini electrice care au semne contrare pe feţele S_1 şi S_2 situate respectiv către sursă şi de partea opusă. După ce s-a stabilit echilibrul electrostatic, aceste sarcini vor produce, la rândul lor, un câmp electric $\vec{E}_1$ ale cărui linii de câmp pornesc în exterior perpendicular pe suprafaţa conductorului. Acest câmp se sumează vectorial cu câmpul $\vec{E}_0$ în orice punct din spaţiu, dând în exterior un câmp

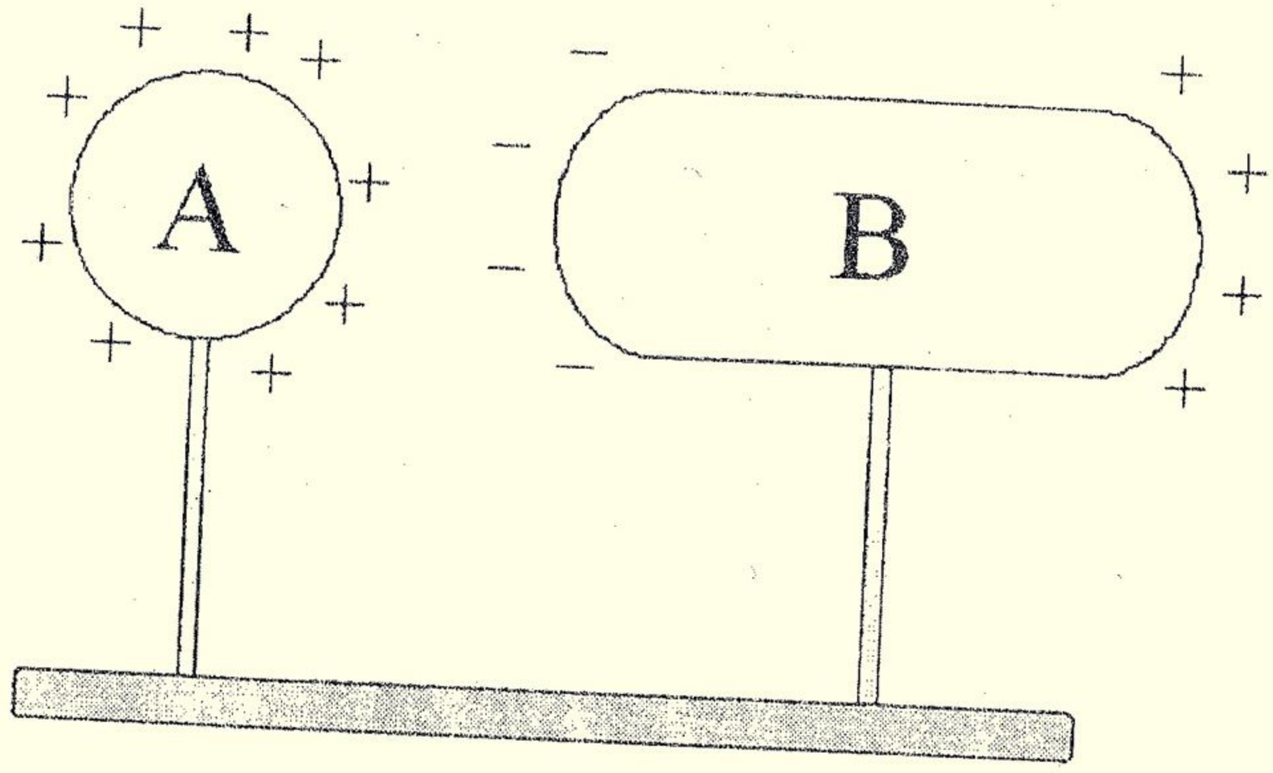


Figura 2.10: Separarea sarcinilor electrice de pe conductorul B, prin influenţă electrostatică

rezultant $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1$. Topografia liniilor de câmp este neuniformă în apropierea suprafeţei. Ea tinde să devină din nou uniformă la distanţe mari, la care câmpul $\vec{E}_1$, (invers proporţional cu pătratul distanţei), tinde să dispară. Conform celor stabilite anterior, suprafeţele echipotenţiale, care sunt totdeauna perpendiculare pe liniile de câmp, vor fi plane la distanţe foarte mari de conductor. Ele vor căpăta forme apropiate de forma conductorului pe măsură ce ne apropiem de acesta, prezentând o discontinuitate în zona de separaţie a sarcinilor pozitive şi negative produse pe conductor de câmpul influenţant E_0. La echilibrul electrostatic al sarcinilor induse pe conductor, câmpul electric rezultant este totdeauna nul în interiorul conductorului ($\vec{E} = 0$), aceasta antrenând condiţia ca în interior să avem $\vec{E}_0 = -\vec{E}_1$.

2. **Influenţa electrostatică în cazul a doi conductori**

Presupunem că unul dintre cei doi conductori, conductorul A, încărcat cu o sarcină pozitivă Q, este adus în apropierea conductorului B, iniţial neutru (Fig. 2.12). Datorită câmpului produs de sarcina Q, pe suprafaţa conductorului B vor apare prin influenţă sarcini pozitive şi negative. Acestea la rândul lor vor produce un câmp electric $\vec{E}_B$ care va influenţa şi conductorul A, provoând o redistribuire a sarcinilor pe acest conductor. Acţiunea fiind reciprocă, procesul de redistribuire a sarcinilor pe cei doi conductori continuă până când se atinge echilibrul electrostatic al noilor sarcini induse reciproc pe cei doi conductori. Când acest echilibru este stabilit, câmpul electric în interiorul ambilor conductori este nul, $\vec{E} = 0$. Atât timp cât conductorii sunt

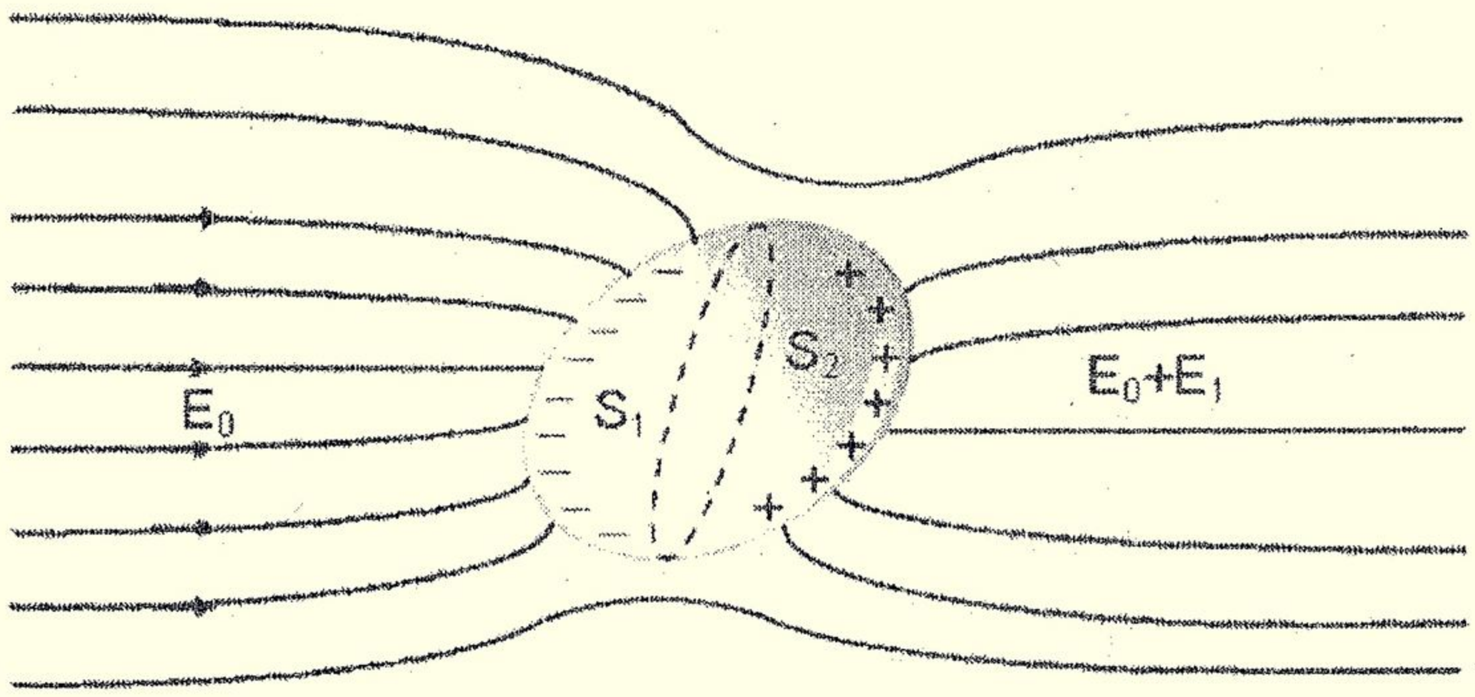


Figura 2.11: Electrizarea prin influenţă a unui conductor izolat situat într-un câmp electric uniform

izolaţi, sarcinile aflate pe suprafeţele lor, sunt $\int_{S_A} \sigma dS = Q$ pe conductorul A şi $\int_{S_B} \sigma dS = 0$ pe conductorul B.

2.8 Determinarea cantitativă a sarcinii induse pe un conductor prin influenţă. Teorema elementelor corespondente.

Considerăm că aceiaşi conductori A şi B din cazul precedent, se află la potenţialele V_A respectiv V_B , în care $V_A > V_B$. Liniile de câmp, perpendiculare pe suprafeţele conductorilor (care, cum se ştie deja, sunt suprafeţe echipotenţiale), sunt dirijate către echipotenţialele descrescătoare, pornind de la conductorul A către B. Numai o parte din totalitatea liniilor de câmp care părăsesc conductorul A va întâlni conductorul B, restul pierzându-se la infinit. Se pune problema de a defini cantitativ sarcina care apare prin influenţă pe conductorul B . Pentru aceasta considerăm un tub oarecare de linii de câmp (Fig. 2.13) care conturează, pe conductorii A şi B , suprafeţele dS_1 şi dS_2 numite *suprafeţe corespondente*. Sarcinile aflate pe aceste suprafeţe sunt dQ_1 respectiv dQ_2. Ele pot fi considerate ca fiind închise într-o suprafaţă Gauss dacă, în prelungirea suprafeţei laterale a tubului către interiorul conductorilor, adăugăm două suprafeţe ds_1 respectiv ds_2 care se sprijină pe conturul elementelor de suprafaţă dS_1 şi dS_2. În acest fel se poate aplica

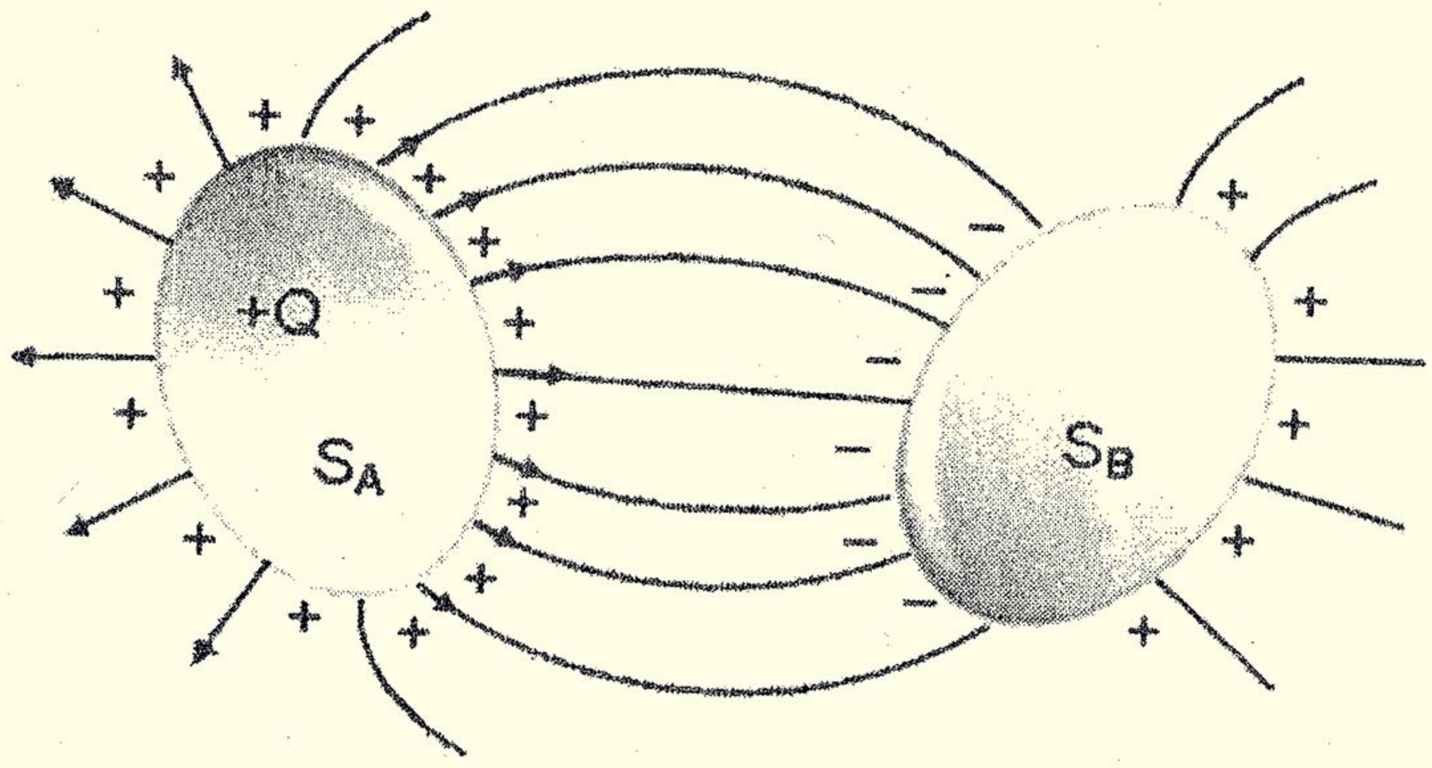


Figura 2.12: Influenţă electrostatică în cazul a doi conductori izolaţi

teorema lui Gauss pentru a determina fluxul $\left(\vec{E}\cdot\overrightarrow{dS}\right)$ creat de sarcina totală dQ_1+dQ_2 prin suprafaţa închisă constituită din suprafaţa laterală dS_L a tubului elementar plus suprafeţele terminale ds_1 şi ds_2.

$$d\Phi=\left(\vec{E}\cdot\overrightarrow{dS}\right)=\left(\vec{E}\cdot\overrightarrow{dS}_L\right)+\left(\vec{E}\cdot\overrightarrow{ds}_1\right)+\left(\vec{E}\cdot\overrightarrow{ds}_2\right)=\frac{dQ_1+dQ_2}{\varepsilon_0}=0$$

Acest flux este nul deoarece vectorii $\vec{E}$ şi $\overrightarrow{dS}_L$ sunt perpendiculari, iar $\left(\vec{E}\cdot\overrightarrow{ds}_1\right)=\left(\vec{E}\cdot\overrightarrow{ds}_2\right)=0$ deoarece $\vec{E}=0$ în interiorul conductorilor A şi B, unde se află suprafeţele elementare ds_1 şi ds_2. Ca urmare

$$dQ_1=-dQ_2. \tag{2.15}$$

Observaţie: *În exprimarea fluxului prin suprafeţele care compun suprafaţa închisă la care se poate aplica teorema lui Gauss am folosit o notaţie simplificată. Mai corect, fiecare termen din expresia fluxului total ar trebui exprimat ca o integrală printr-una dintre suprafeţele elementare menţionate. Aceasta pentru a ţine cont de faptul că în diverse puncte ale suprafeţelor elementare normala este diferită.*

Deci, în virtutea teoremei elementelor corespondente, *sarcinile care se află pe elemente corespondente sunt egale în valoare absolută şi de semn contrar*. Considerând totalitatea tuburilor de linii de câmp care unesc conductorii A şi B, se poate deduce imediat că sarcina produsă prin influenţă

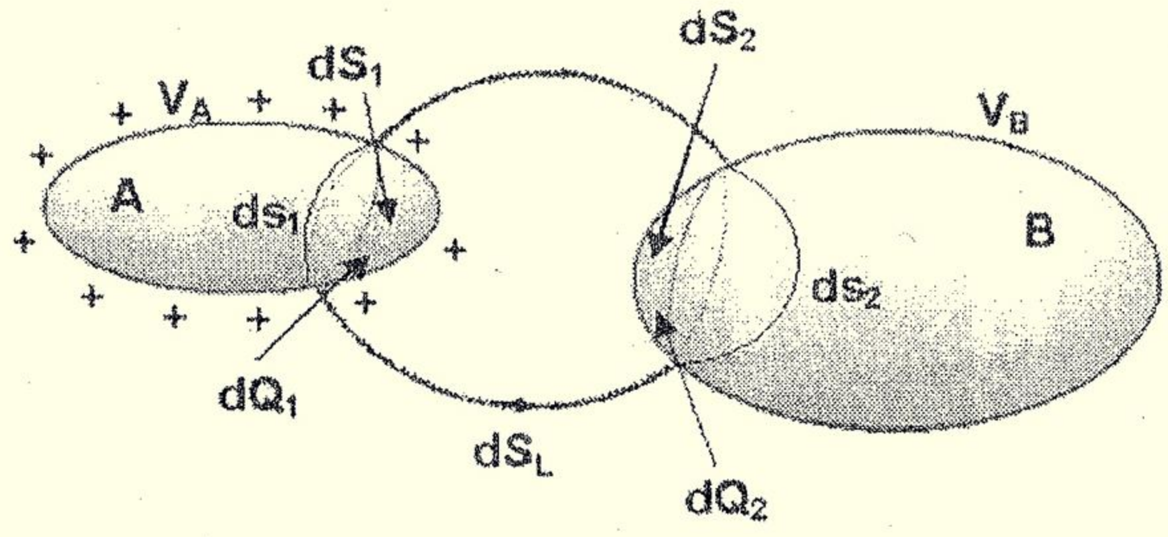


Figura 2.13: Teorema elementelor corespondente

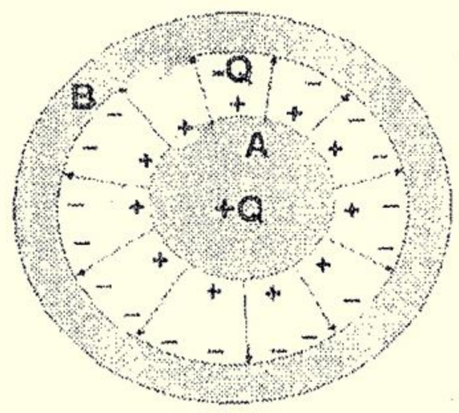


Figura 2.14: Influenţă totală

pe conductorul B este mai mică decât sarcina de pe conductorul A, deoarece numai o parte din totalitatea tuburilor de linii de câmp care părăsesc conductorul A întâlnesc elemente corespondente pe conductorul B.

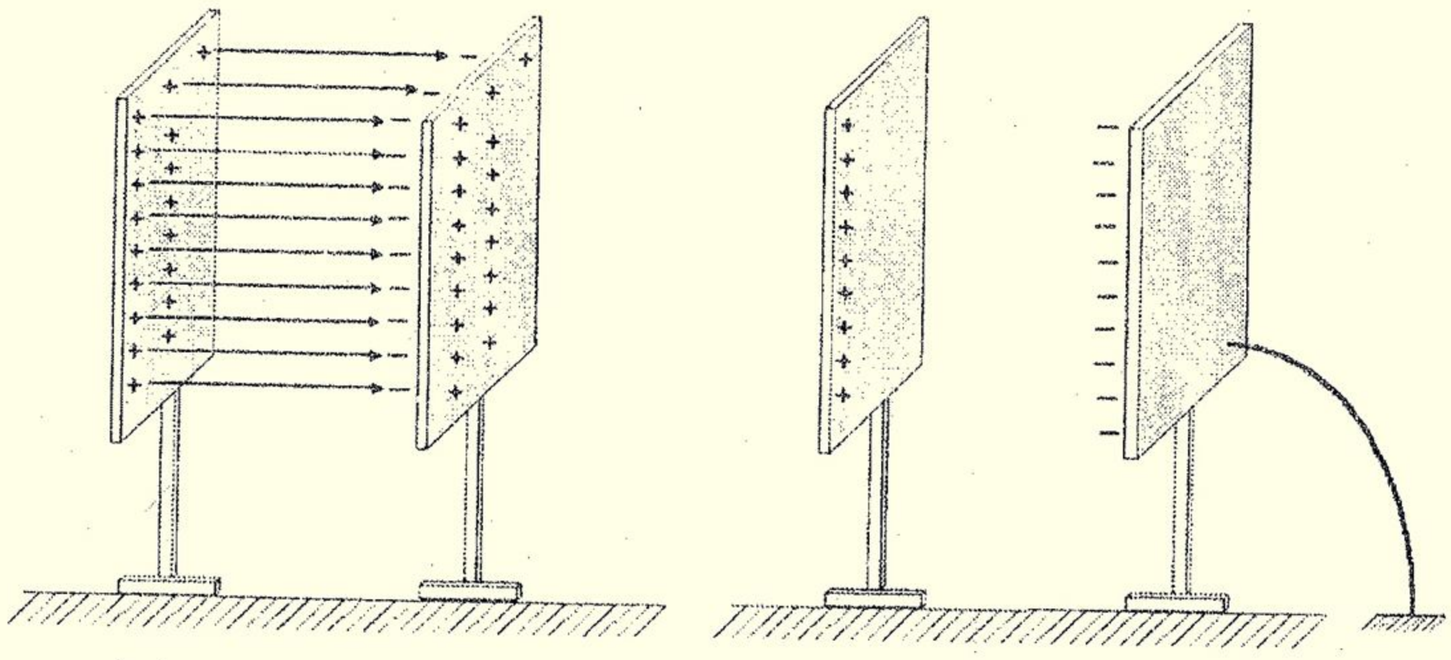
2.9 Influenţă totală

Întreaga sarcină indusă prin influenţă pe conductorul B poate să fie egală şi de semn contrar cu sarcina de pe conductorul A numai dacă toate tuburile de câmp care se sprijină pe conductorul A îşi găsesc elemente corespondente pe conductorul B. Există mai multe posibilităţi de a realiza această situaţie, dintre care menţionăm:

a) *Conductorul A se află în interiorul conductorului B* (Fig. 2.14)

b) *Conductorii A şi B sunt plani si paraleli*, (Fig. 2.15(a), 2.15(b)). În acest caz câmpul electric dintre conductori este uniform şi toate tuburile de câmp au elemente corespondente pe interfeţele celor doi conductori.

În ambele cazuri se obţine prin influenţă, pe faţa interioară a conductorului B, o sarcină maximă egală şi de semn contrar cu cea de pe conductorul



(a) conductori izolaţi (b) un conductor conectat la sol

Figura 2.15: Influenţă totală în cazul a doi conductori plani şi paraleli

A, deoarece influenţa este totală. Pe faţa exterioară a conductorului B va apare o sarcină egală şi de acelaşi semn cu cea de pe conductorul A. Dar dacă se conectează conductorul B la sol, prin intermediul unui fir conductor, sarcina de pe faţa exterioară a conductorului B se scurge rapid la Pământ, în timp ce sarcina de pe faţa interioară a acestui conductor rămâne nemodificată. Astfel sistemul de conductori A şi B va conţine, pe feţele interioare, numai sarcini egale şi de semn contrar.

2.10 Metoda imaginilor

Problemele de echilibru electrostatic al sarcinilor care apar prin influenţă pe conductori, când în vecinătatea acestora se află sarcini punctiforme sau distribuţii de sarcină, pot fi rezolvate pornind de la soluţii cunoscute privind distribuţiile de sarcină, aplicând aşa numita *metodă a imaginilor*. Pentru a înţelege această metodă o vom aplica mai întâi în două cazuri particulare privind rezolvarea problemei de influenţă a unei sarcini punctiforme asupra unui conductor plan legat la Pământ şi asupra unei sfere conductoare

Influenţa unei sarcini punctiforme asupra unui plan conductor aflat la potenţial nul

Conductorul în chestiune se prezintă ca o suprafaţă echipotenţială plană pentru care $V = 0$, şi în exteriorul căreia se află o sarcină $+Q$ la distanţa d pe axa Oz perpendiculară pe plan (Fig. 2.16). Pentru a determina sarcina

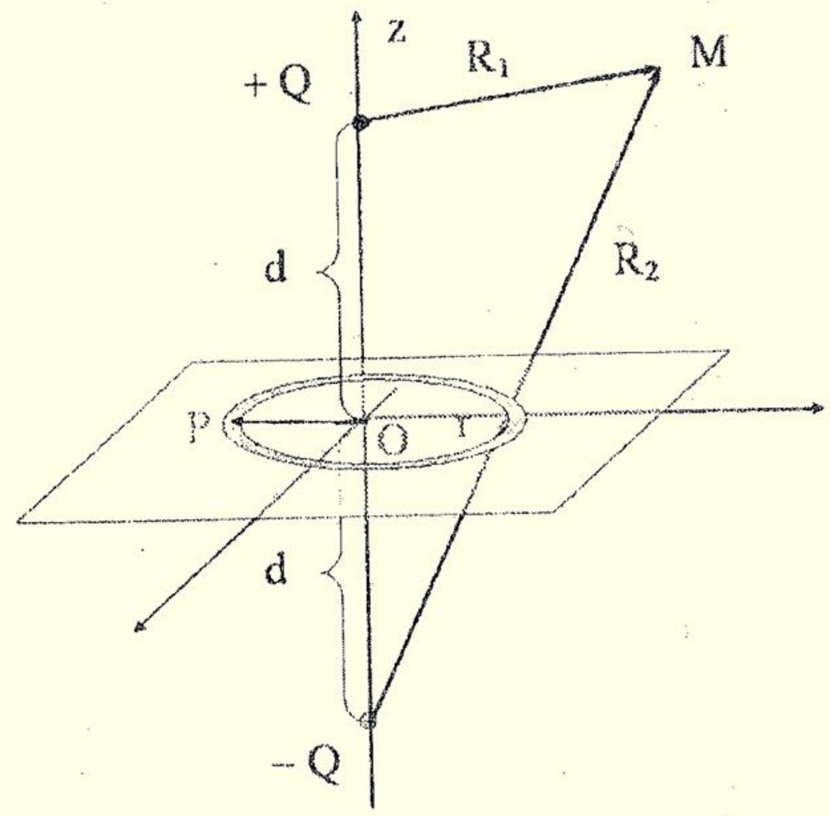
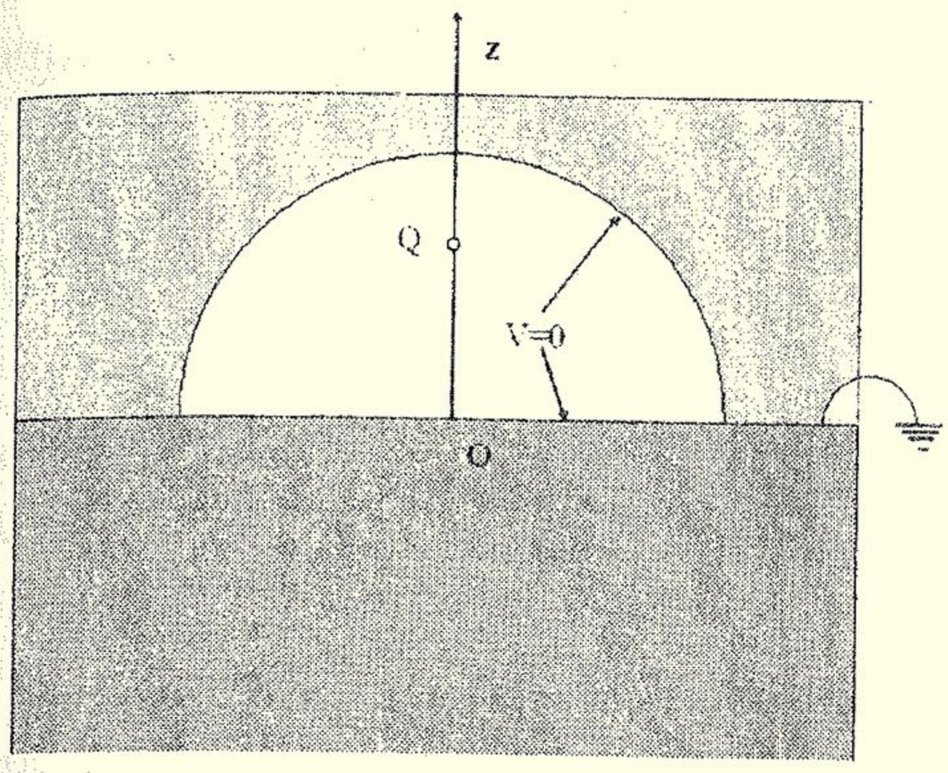


Figura 2.16: Pentru determinarea sarcinii produse prin influenţă pe un plan conductor de către sarcina punctiformă Q exterioară planului

indusă prin influenţă într-un punct P de pe conductor ar fi suficient să cunoaştem câmpul electric al sarcinii $+Q$ în acel punct. Acest câmp poate fi determinat relativ simplu dacă vom considera o sarcină fictivă $-Q$ situată pe aceeaşi axă Oz la o distanţă egală cu d, dar de partea cealaltă a planului. Ca şi cum sarcina $-Q$ ar fi imaginea într-o oglindă plană a sarcinii $+Q$, suprafaţa acestei "oglinzi" plane fiind o suprafaţă de potenţial nul.

Dacă sarcinile sunt egale şi de semne contrare suprafaţa de potenţial zero este plană şi coincide cu suprafaţa conductorului. Altfel spus, problema iniţială a sistemului format de un conductor plan infinit legat la Pământ (potenţial zero) şi cea obţinută de noi prin introducerea unei sarcini "imagine" (problema unui sistem format din sarcina Q şi imaginea sa) sunt echivalente. Ecuaţia Laplace cu condiţii la limită date pentru potenţial are soluţie unică. Această proprietate stă la baza metodei imaginilor. Practic, se inlocuieşte o problemă de electrostatică cu alta mai simplă, a cărei soluţie o cunoaştem. Condiţia ca cele două probleme să aibă aceeaşi soluţie, într-o zonă din spaţiu, este ca pe frontiera acelei regiuni spaţiale să se respecte aceleaşi condiţii la limită. În cazul de faţă, zona în care se caută o soluţie simplă, prin accastă metodă, este cea din afara conductorului (semispaţiul pozitiv). Aceasta are drept frontieră planul $z = 0$ şi o semisferă de rază infinită (vezi Fig.2.17(a) şi Fig. 2.17(b)).

Ştiind că cele două sisteme au soluţii identice în semiplanul pozitiv fo-



(a) Sistemul sarcină - conductor (b) Sistemul sarcină - sarcină imagine

Figura 2.17: Condiţiile la limită: $V = 0$ pentru $z = 0$ şi $R_0 \to \infty$

losim sistemul mai simplu, cel format din sarcină şi imaginea sa, pentru a calcula câmpul în vecinătatea planului $z = 0$ care este proporţional, în conformitate cu teorema lui Coulomb, cu densitatea de sarcină de influenţă pe acest plan. Astfel, potenţialul într-un punct M situat deasupra planului $(z > 0)$ la distanţele R_1 şi R_2 de sarcinile $+Q$ şi $-Q$, este

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right). \tag{2.16}$$

Este evident că, în realitate, de partea cealaltă a planului conductor $(z < 0)$ legat la Pământ, potenţialul este identic nul iar sarcinile reale, care apar prin influenţă pe conductor, sunt în exclusivitate sarcini negative distribuite pe suprafaţă ca în Fig. 2.16 şi a căror densitate superficială σ depinde de distanţa punctului P de pe plan, în raport cu axa dipolului, respectiv distanţa faţă de punctul O. Notând această distanţă $\overline{OP} = r$, expresia potenţialului dipolului în punctul $M\,(z)$ capătă forma:

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + (z-d)^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z+d)^2}}\right] \tag{2.17}$$

iar densitatea de sarcină în punctul P de pe suprafaţa conductorului, la distanţa r de punctul O este:

$$\sigma\,(r) = -\varepsilon_0\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{z=0} \tag{2.18}$$

După efectuarea calculului derivatei potenţialului în punctul $z = 0$ se obţine expresia:

$$\sigma = -\frac{Q}{2\pi}\frac{d}{(r^2+d^2)^{3/2}} \tag{2.19}$$

În punctul în care se află sarcina $+Q$, câmpul electric $\vec{E}$, creat de întreaga distribuţie σ, este acelaşi cu câmpul creat de sarcina imagine $-Q$ aflată la distanţa $2d$ de acest punct:

$$\vec{E} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{4d^2}\vec{n} \tag{2.20}$$

$\vec{n}$ fiind versorul unitar al direcţiei Oz.

Conductorul plan exercită asupra sarcinii $+Q$ o forţă de atracţie egală cu

$$\vec{F} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{4d^2}\vec{n}. \tag{2.21}$$

Influenţa unei sarcini punctiforme asupra unei sfere conductoare aflate la potenţial nul

Vom arăta că determinarea echipotenţialei nule a două sarcini punctiforme $+Q$ şi $-q$ ne va permite să rezolvăm problema influenţei unei sarcini punctiforme, de exemplu $+Q$, asupra unei sfere conductoare de rază. Potenţialul sarcinilor într-un punct M situat la distanţa R_1 de sarcina $+Q$ şi la distanţa R_2 de sarcina $-q$, este egal cu suma potenţialelor create de fiecare sarcină în acel punct: (Fig. 2.18),

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{R_1} - \frac{q}{R_2}\right) \tag{2.22}$$

Echipotenţiala nulă, $V = 0$, corespunde condiţiei

$$\frac{Q}{q} = \frac{R_1}{R_2}, \tag{2.23}$$

care, exprimă faptul că, raportul distanţelor de la două puncte fixe (în care se află cele două sarcini) la punctul M, este constant. Se ştie că locul geometric al punctelor M care satisfac această condiţie este o sferă. Să particularizăm această relaţie pentru cazurile în care punctul M se află în poziţiile P_1 şi P_2

Figur

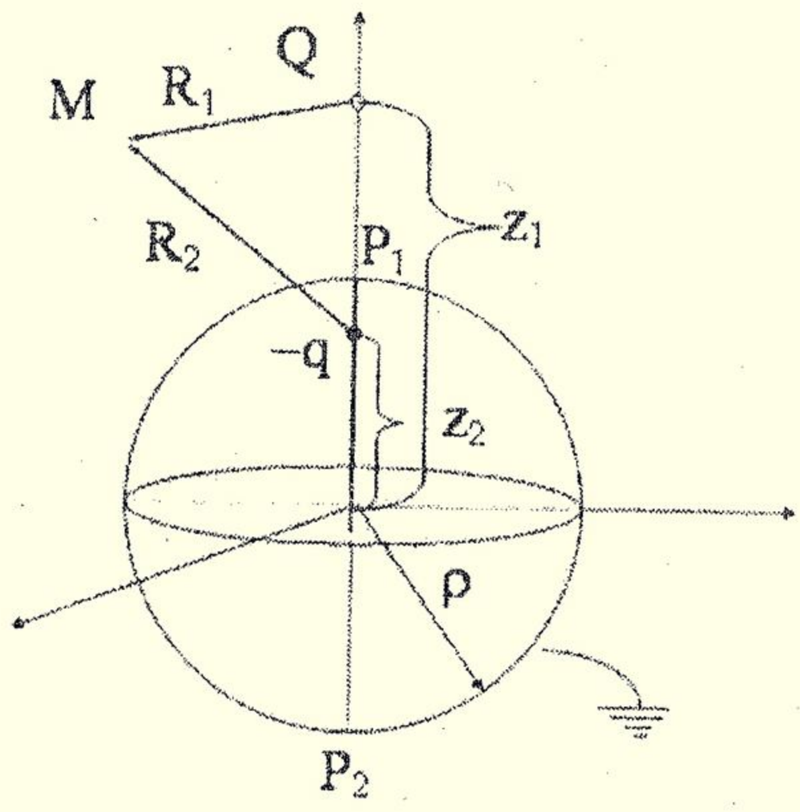


Figura 2.18: Pentru calculul sarcinii produse prin influenţă de o sarcină punctiformă Q exterioare unei sfere conductoare

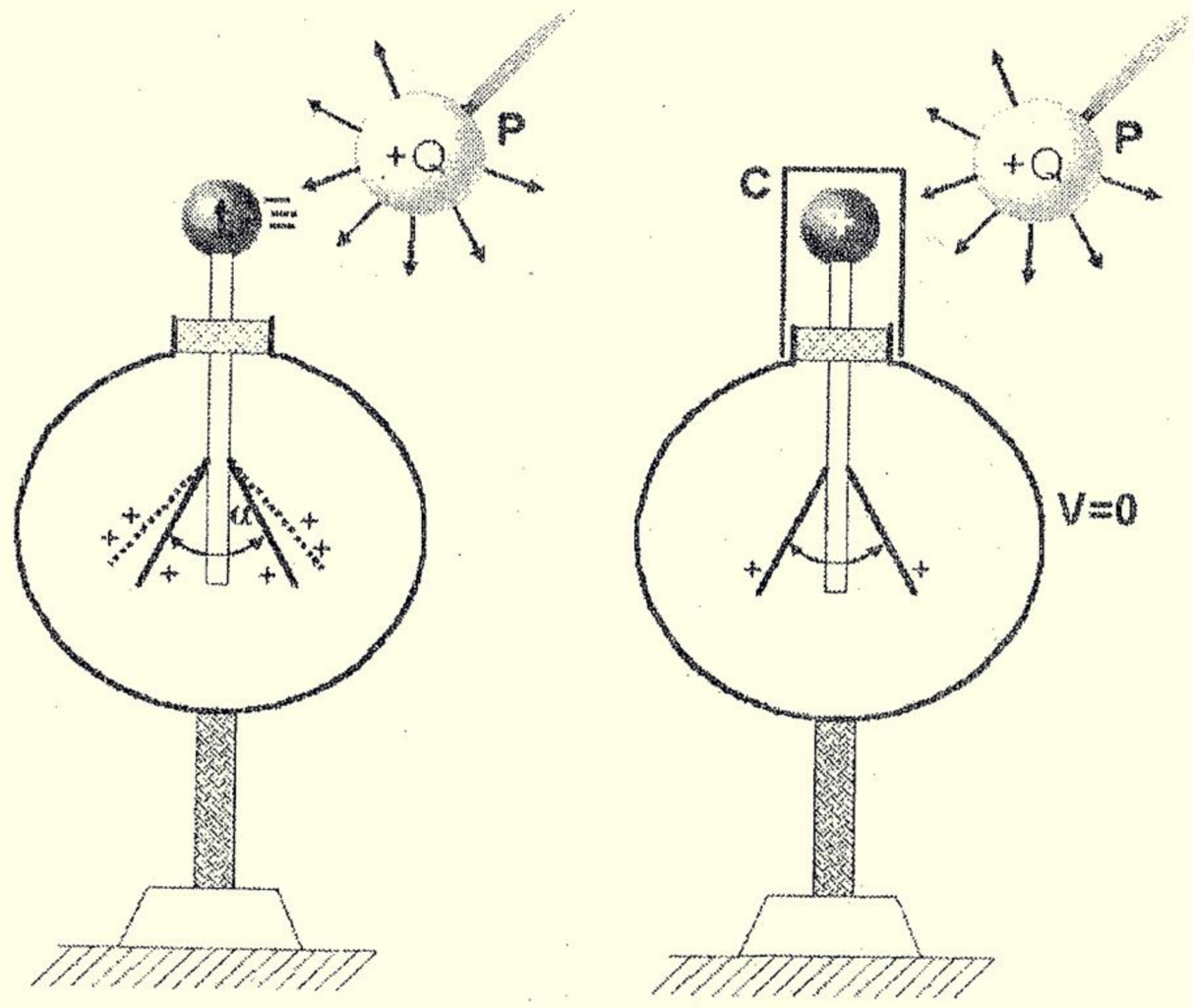
pe axa Oz care trece prin centrul sferei de rază ρ şi prin punctele în care se află sarcinile $+Q$ şi $-q$, (Fig. 2.18). Notăm cu z_1 distanţa de la centrul O al sferei la sarcina $+Q$, şi cu z_2 distanţa la sarcina $-q$. Când punctul M se află în poziţia P_1, avem: $R_1 = z_1 - \rho$ şi $R_2 = \rho - z_2$, iar când M se află în P_2 avem: $R_1 = z_1 + \rho$ şi $R_2 = \rho + z_2$. În aceste condiţii relaţia (2.23) capătă formele următoare:

$$\frac{Q}{q} = \frac{z_1 - \rho}{\rho - z_2} = \frac{z_1 + \rho}{\rho + z_2} = \frac{z_1}{\rho} = \frac{\rho}{z_2} \tag{2.24}$$

Se deduc, din aceste egalităţi, mărimea şi poziţia sarcinii imagine $-q$ din interiorul sferei de rază ρ, în funcţie de mărimea sarcinii reale $+Q$, şi de distanţa sa, z_1, faţă de centrul sferei, pentru care suprafaţa sferei este o echipotenţială nulă:

$$-q = -Q\frac{\rho}{z_1} \quad şi \quad z_2 = \frac{\rho^2}{z_1} \tag{2.25}$$

Cât de mare este sarcina care apare prin influenţă pe suprafaţa unui conductor sferic de rază ρ legat la Pământ, dacă o sarcină punctiformă $+Q$ se află la distanţa z_1 faţă de centrul sferei ($z_1 > \rho$)? Aplicând teorema lui Gauss pentru o suprafaţă sferică de rază $R > \rho$ ajungem imediat la concluzia



(a) Electroscop fără ecran electrostatic

(b) Electroscop cu ecran electostatic

Figura 2.19: Electroscopul

că sarcina totală care apare prin influenţă pe sfera conductoare (cu $V = 0$) este exact sarcina $-q$ dată de prima ecuaţie (2.25). Această sarcină este evident mai mică în valoare absolută decât sarcina $+Q$, fapt care sugerează, conform teoremei elementelor corespondente, că o parte din liniile de câmp care vin de la sarcina exterioară $+Q$ se închid la infinit.

2.11 Ecran electric

Semnificaţia experimentală a noţiunii de ecran electric poate fi sugerată utilizând un electroscop. Foiţele metalice foarte subţiri, lipite pe tija metalică a electroscopului, sunt situate in interiorul unei cutii metalice în contact cu Pământul. Tija este izolată de incinta metalică. Cu ajutorul unui corp de probă se comunică tijei o sarcină electrică pozitivă. Aceasta se repartizează pe tijă şi pe foiţe, produând o deviaţie α a acestora, (Fig. 2.19(a)). Dacă aducem în apropierea tijei electroscopului un corp P încărcat cu o sarcină pozitivă Q, fără să-l punem în contact cu tija, constatăm că deviaţia foiţelor se măreşte. Aceasta, datorită faptului că pe tija electroscopului şi implicit pe foiţe, apar sarcini electrice suplimentare, pozitive, prin influenţă. Acum să acoperim

B.C.U. „M. EMINESCU" IAŞI
F 1 7 0 *

B.C.U. „M. EMINESCU" IAŞI
FIZICĂ

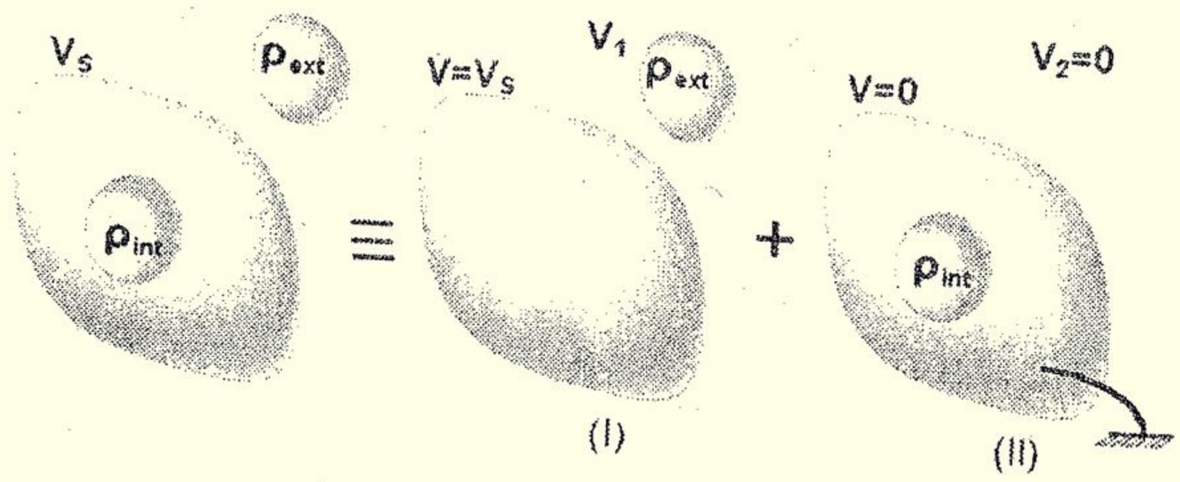


Figura 2.20: Pentru interpretarea generală a noţiunii de ecran electric

partea exterioară a tijei cu un mic capac cilindric metalic pus în contact cu cutia metalică a electroscopului. Astfel, potenţialul capacului metalic va fi acelaşi cu cel al cutiei conductoare a electroscopului. Deoarece aceasta este în contact cu Pământul, potenţialul comun va fi nul, (V=0). De data aceasta se va constata că deviaţia electroscopului rămâne constantă, indiferent de sarcina pe care o va purta corpul P adus în apropierea tijei electroscopului. În aceleaşi condiţii, dacă iniţial electroscopul nu era încărcat, deviaţia foiţelor va rămâne nulă. Efectiv, cutia metalică, adusă la un potenţial constant, (în cazul nostru V=0), protejează starea electrică din interiorul incintei, de orice influenţă exterioară. În acest fel, ea joacă un rol de ecran electric. În aceeaşi manieră, starea electrică din exteriorul incintei este protejată de orice influenţă provenind din interiorul incintei.

Aceste consideraţii pot fi interpretate într-o manieră mai generală: Considerăm că incinta se află la potenţialul $V = V_S$ şi că starea electrică a sistemului constituit din sarcini interioare şi exterioare incintei, (Fig. 2.20), este rezultanta a două stări de echilibru: una corespunzând existenţei numai a sarcinilor exterioare incintei aflate la potenţialul V_S, cealaltă numai sarcinilor interioare incintei aduse la potenţialul zero.

În prima stare de echilibru potenţialul sarcinilor exterioare fiind V_1, acesta satisface condiţiile:

- în exterior $\quad \Delta V_1 = -(\rho_{ext}/\varepsilon_0)$
- pe suprafaţă $\quad V_1 = V_S$
- la infinit $\quad V_1 = 0$

În exteriorul incintei potenţialul V_1 depinde numai de distribuţia sarcinilor exterioare ρ_{ext}. În interiorul incintei potenţialul este constant şi egal cu V_S.

În *a doua stare de echilibru*, datorată numai sarcinilor interioare, avem

- în interior $\Delta V_2 = -(\rho_{int}/\varepsilon_0)$
- pe suprafaţă $V_2 = 0$ (incinta legată la Pământ)
- în exterior şi la infinit $V_2 = 0$ (nu există sarcini exterioare şi $V_S = 0$)

Deci în exteriorul incintei potenţialul V_2 este nul peste tot, iar în interior V_2 depinde numai de distribuţia sarcinilor din interior ρ_{int}.

Suprapunerea celor două stări de echilibru corespunde sistemului iniţial:

-în exterior $V = V_1 + 0$: Potenţialul V nu depinde de sarcinile interioare.

-în interior $V = V_S + V_2$: Potenţialul V nu depinde de sarcinile exterioare, ci numai de constanta V_S.

In concluzie, oricare ar fi valoarea acestei constante *starea electrică din interiorul incintei conductoare nu depinde de starea electrică din exteriorul ei.* Se interpretează astfel faptele experimentale prezentate la începutul acestui paragraf şi proprietăţile ecranului electric.

2.12 Aplicaţii ale fenomenului de influenţă

Dintre numeroasele aplicaţii ale fenomenului de influenţă, reţinem aici câteva care sunt de interes didactic, când se urmăreşte obţinerea unei sarcini electrice pe un conductor:

Electroforul, Un disc metalic, care poate fi susţinut de un mâner izolator se încarcă prin influenţă când este adus în contact cu suprafaţa unui disc constituit dintr-un dielectric, electrizat în prealabil prin frecare cu o bucată de postav sau cu o piele de pisică. După îndepărtarea discului, sarcinile provocate prin influenţă se recombină şi discul metalic nu mai rămâne electrizat, fapt care poate fi probat prin atingerea acestuia de tija unui electroscop. Deviaţia foiţelor acestuia va fi nulă. Pentru a face ca sarcina provocate prin influenţă să rămână pe discul metalic, se procedează în felul următor: Discul de dielectric este perforat axial şi fixat pe un disc conductor prevăzut cu un cui care pătrunde axial prin discul de dielectric până la suprafaţa acestuia (Fig. 2.21). Acest dispozitiv se numeşte electrofor. În condiţiile în care experimentatorul aduce discul metalic în contact cu suprafaţa dielectricului, sarcina care a fost separată prin frecare pe discul de dielectric, atrage prin influenţă sarcini de semn contrar de pe discul metalic şi respinge în acelaşi timp sarcinile de semn contrar. Datorită distanţei foarte mici care separă discul metalic de suprafaţa dielectricului, forţele electrostatice de respingere sunt suficient de mari pentru face ca ele să se scurgă la Pământ prin cuiul

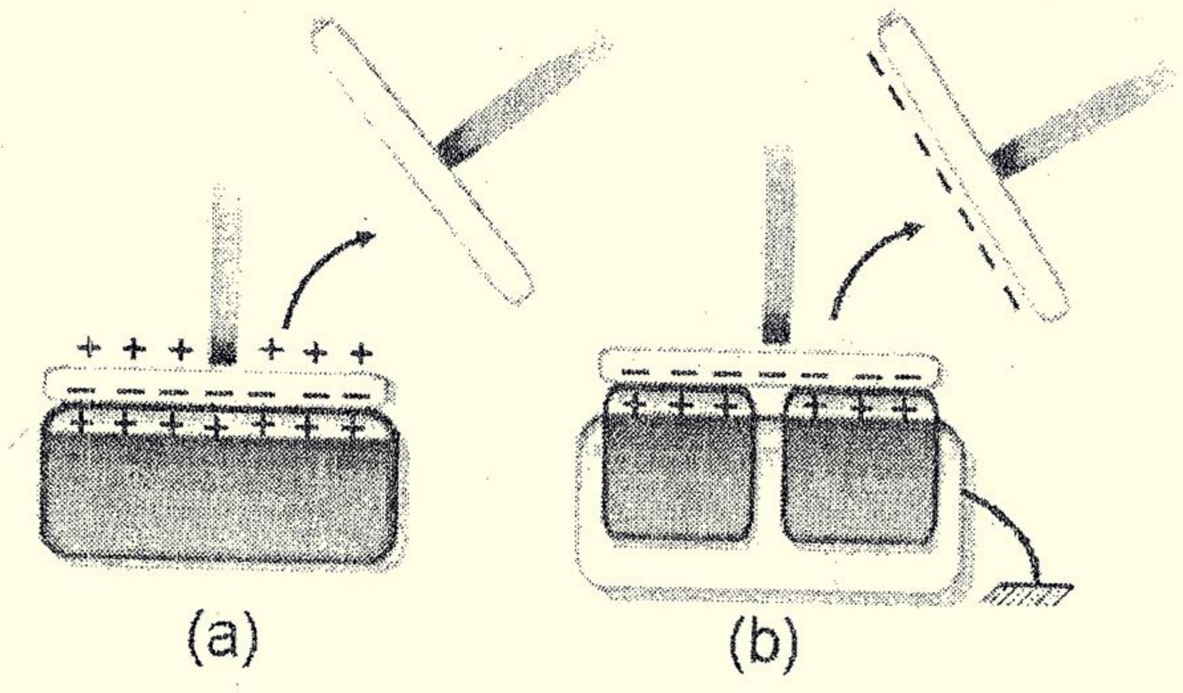


Figura 2.21: Funcţionarea electroforului. a) fără conexiune la Pământ, b) cu conexiune la Pământ

metalic al suportului, care se află în permanenţă în contact cu discul conductor. După înlăturarea discului, acesta conţine numai sarcini de semn contrar celor de pe dielectric. În condiţiile unei atmosfere uscate, sarcina produsă pe un disc de cupru cu diametrul de 15 cm, pus în contact cu un disc de dielectric constituit dintr-un amestec de sulf cu parafină, frecat cu o piele de pisică, este suficient de mare pentru a produce o descărcare prin sânteie prin mâna experimentatorului când aceasta se apropie la o distanţă de 15-20 mm de suprafaţa discului.

2.13 Capacitatea electrică a unui conductor izolat

2.13.1 Noţiunea de capacitate electrică.

Este convenabil să sugerăm mai întâi într-o manieră generală noţiunea de capacitate electrică a unui conductor. Pentru aceasta presupunem că unui conductor de formă geometrică oarecare i se comunică o sarcină electrică Q. Dacă forma conductorului este neregulată, această sarcină se repartizează neuniform pe suprafaţa a conductorului, astfel încât $Q = \int_S \sigma dS$. Potenţialul electric al conductorului la distanţa R depinde de mărimea sarcinii Q şi are

aceeaşi valoare V_S pe toată suprafaţa lui:

$$V_S = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\sigma dS}{R}. \tag{2.26}$$

Este evident că, menţinând conductorul la o distanţă R constantă faţă de Pământ (potenţialul acestuia fiind $V = 0$) şi multiplicând sarcina lui de n ori, potenţialul conductorului se va multiplica de asemenea de n ori. Rezultă din (2.26) că *raportul dintre sarcina totală Q a conductorului şi potenţialul său, V, este o constantă C.* Atât timp cât poziţia conductorului faţă de Pământ rămâne fixă, ($R = const$), constanta C nu trebuie să se modifice oricât de mult vom mări sarcina Q. Efectiv, potenţialul V creşte proporţional cu sarcina până la limita la care diferenţa de potenţial dintre conductor şi Pământ devine suficient de mare pentru a transporta la sol surplusul de sarcină prin mediul care separă conductorul de sol. Se înţelege astfel că această constantă C reprezintă efectiv *capacitatea electrică a conductorului izolat*, şi că ea depinde numai de geometria conductorului. Această relaţie de proporţionalitate între sarcină şi potenţial există pentru orice conductor izolat:

$$Q = CV. \tag{2.27}$$

2.13.2 Definiţie. Dimensiuni şi unităţi.

Relaţia (2.27) ne permite să definim *capacitatea electrică a unui conductor ca fiind o mărime numeric egală cu sarcina pe care o capătă conductorul, când este adus la potenţialul de 1 volt.* În sistemul internaţional de mărimi şi unităţi, (SI), dimensiunea fizică a capacităţii este,

$$[C] = \left[\frac{Q}{V}\right] = \left[\frac{Q}{W/Q}\right] = M^{-1}L^2T^4I^2 \tag{2.28}$$

iar unitatea de capacitate, numită farad (F), este capacitatea unui conductor care, izolat în vid, capătă o sarcină de un coulomb când este adus la potenţialul de un volt. În evaluările experimentale ale capacităţii, această unitate se dovedeşte a fi mult prea mare. Este suficient să apreciem că un conductor sferic, de talia Pământului (raza $R_0 \approx 6,4.10^6$ metri), are o capacitate mult mai mică decât un farad; Într-adevăr, utilizând potenţialul unei sfere incărcate cu sarcini electrice distribuite uniform la suprafaţa acesteia şi relaţia de

definiţie pentru capacitatea conductorului izolat (2.27), deducem că *expresia capacităţii unui conductor sferic izolat, având raza* R *este*

$$C = Q/V = 4\pi\varepsilon_0 R \tag{2.29}$$

şi astfel, pentru $R = R_0$, capacitatea unei sfere conductoare de dimensiunile Pământului este $C = 712\ 10^{-6}$ F$= 712\ \mu$F. Capacitatea unui conductor sferic cu raza $R = 1$ metru, este $C = 112\ 10^{-10}$ F$=112$ pF. Se înţelege astfel că deseori este preferabil să se exprime capacitatea electrică în subunităţile *microfarad* ($1\mu F = 10^{-6}F$) şi *picofarad* ($1pF = 10^{-12}F$).

2.14 Capacitatea electrică a unui sistem de conductori

2.14.1 Coeficienţi de capacitate.

Într-un caz particular considerăm mai întâi un sistem de trei conductori aduşi la potenţialele V_1, V_2, V_3 în raport cu potenţialul solului ($V = 0$). Vom demonstra că sarcinile totale Q_1, Q_2, Q_3, care se află în echilibru electrostatic pe aceşti conductori, Fig. 2.22, pot fi determinate în funcţie de aceste potenţiale. Pentru aceasta aplicăm metoda suprapunerii stărilor de echilibru, considerând că starea electrică a sistemului în chestiune poate fi reconstituită prin suprapunerea a trei stări de echilibru, ca în Fig. 2.22. În fiecare dintre acestea, unul dintre conductori se află la potenţialul pe care îl are în sistemul iniţial, în timp ce ceilalţi doi conductori, sunt legaţi la sol, deci potenţialul lor este nul. Astfel, în prima stare de echilibru, conductorul (1) se află la potenţialul V_1 iar sarcinile care se stabilesc pe cei trei conductori la echilibru, sunt proporţionale cu V_1, respectiv: sarcina $C_{11}V_1$ pe conductorul (1), sarcina $C_{21}V_1$ produsă prin influenţă pe conductorul (2) şi $C_{31}V_1$ de asemenea prin influenţă pe conductorul (3). În a doua stare de echilibru, conductorul (2) este pus la potenţialul iniţial, V_2 iar ceilalţi doi sunt legaţi la sol ($V = 0$), iar în a treia stare de echilibru conductorul (3) este pus la potenţialul V_3 iar ceilalţi doi sunt conectaţi la sol. Fiecare dintre aceşti conductori, capătă în cele trei stări sarcinile menţionate în Tabelul următor

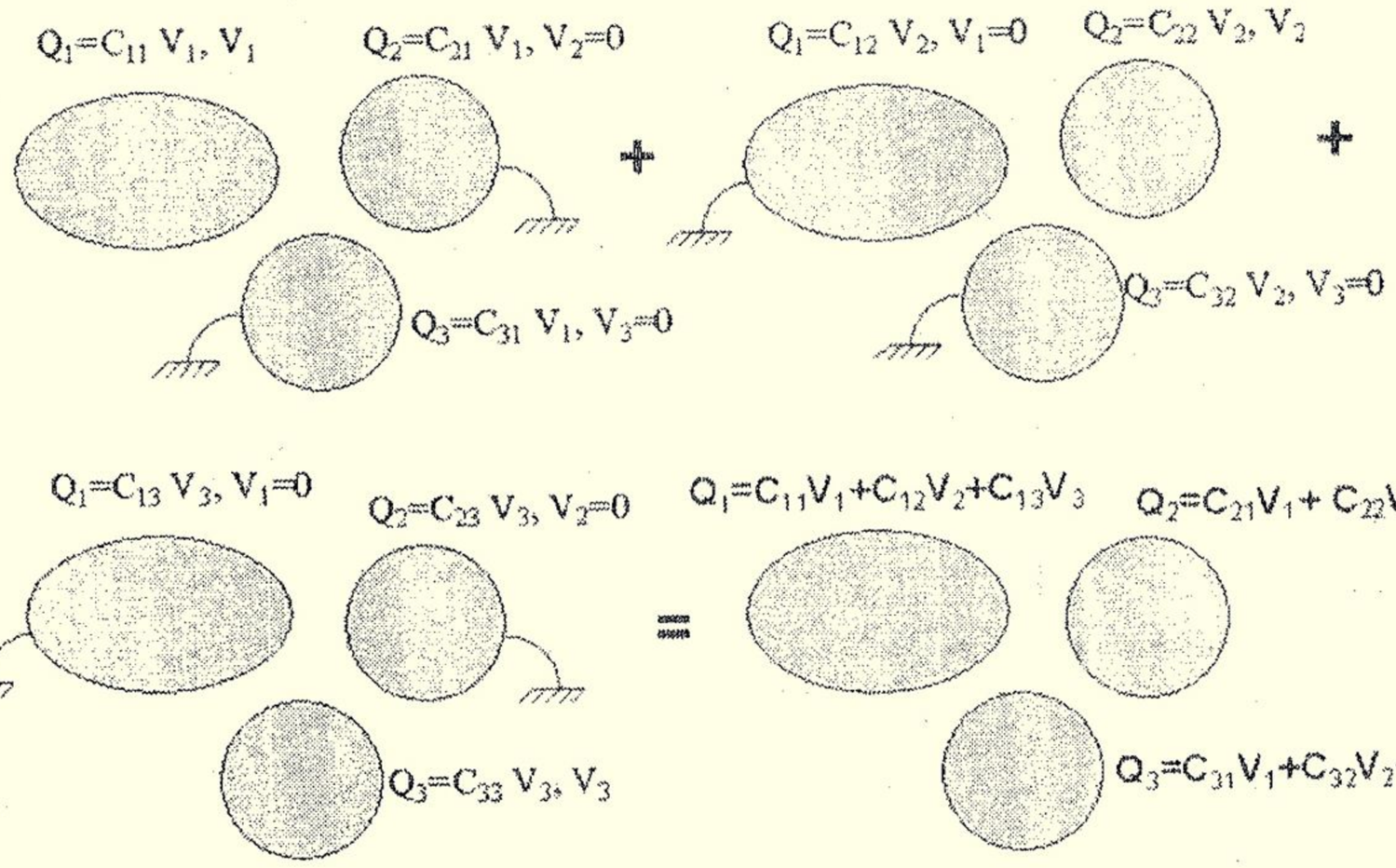


Figura 2.22: Metoda superpoziţiei stărilor de echilibru electrostatic ale sarcinilor şi ale potenţialelor, aplicată unui sistem de trei conductori

Starea de echilibru	Potenţialul conductor			Sarcina conductorului		
	(1)	(2)	(3)	(1)	(2)	(3)
I-a	V_1	0	0	$C_{11}V_1$	$C_{21}V_1$	$C_{31}V_1$
II-a	0	V_2	0	$C_{12}V_2$	$C_{22}V_2$	$C_{32}V_2$
III-a	0	0	V_3	$C_{13}V_3$	$C_{23}V_3$	$C_{33}V_3$

Suprapunem cele trei stări de echilibru, sumând pe coloane potenţialele şi sarcinile corespunzătoare fiecărui conductor, şi reconstituim sarcina totală de pe fiecare dintre ei, ca funcţii liniare de potenţialele lor:

Conductorul	Potenţialul	Sarcina
(1)	V_1	$Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2 + C_{13}V_3$
(2)	V_2	$Q_2 = C_{21}V_1 + C_{22}V_2 + C_{23}V_3$
(3)	V_3	$Q_3 = C_{31}V_1 + C_{32}V_2 + C_{33}V_3$

Acest rezultat poate fi generalizat fără restricţii la un sistem constituit dintr-un număr oarecare N de conductori în echilibru electrostatic:

$$Q_i = \sum_{j=1}^{N} C_{ij}V_j. \tag{2.30}$$

Semnificaţia fizică a coeficienţilor C_{ij} trebuie să fie înţeleasă în mod diferit pentru cazurile $i = j$ (acelaşi conductor) şi $i \neq j$ (conductori diferiţi):

De exemplu, din expresia lui Q_1 deducem cu uşurinţă că C_{11} *reprezintă o mărime numeric egală cu sarcina pe care o capătă conductorul (1) când propriul său potenţial este egal cu unitatea* ($V_1 = 1volt$) , *în timp ce potenţialele tuturor celorlalţi conductori sunt nule.* Dimensional, C_{11} este omogen cu o capacitate, dar este evident că aceasta este *capacitatea conductorului (1) în prezenţa celorlalţi conductori* şi ea este diferită de *capacitatea conductorului (1) izolat* (considerat separat din sistem). Această semnificaţie fizică o au toţi coeficienţii C_{ij} care au indicii egali ($i = j$) şi se numesc *coeficienţi de capacitate.*

Coeficienţii care au indicii diferiţi ($i \neq j$) se numesc *coeficienţi de influenţă* De exemplu, din aceeaşi expresie a sarcinii Q_1, se poate deduce imediat *semnificaţia fizică a coeficientului de influenţă* C_{13}. *Acesta este o mărime numeric egală cu sarcina pe care o capătă prin influenţă conductorul (1) când potenţialul conductorului (3) este egal cu unitatea* ($V_3 = 1volt$), *în timp ce toţi ceilalţi conductori, (inclusiv conductorul (1)), se află la potenţialul zero.*

Având în vedere faptul că, în general, pentru toţi coeficienţii de capacitate avem expresii în care Q_i şi V_i au în mod necesar acelaşi semn, se deduce imediat că *întotdeauna coeficienţii de capacitate sunt pozitivi.* Dimpotrivă, *coeficienţii de influenţă sunt totdeauna negativi.* Într-adevăr, dacă potenţialul V_j al unui conductor j oarecare este pozitiv, sarcina pe care o capătă prin influenţă un conductor i, aflat în vecinătate, este în mod necesar negativă, deci $C_{ij} < 0$ când $i \neq j$. Totodată, influenţa celor doi conductori fiind reciprocă, se poate demonstra relativ simplu egalitatea $C_{ij} = C_{ji}$.

2.14.2 Coeficienţi de potenţial

Problema inversă celei puse mai înainte, în cazul determinării coeficienţilor de capacitate, constă în determinarea potenţialelor conductorilor în funcţie de sarcinile lor, la echilibrul electrostatic. În particular, considerând acelaşi sistem de trei conductori, presupunem că sunt date sarcinile Q_1, Q_2 şi Q_3, şi dorim să stabilim expresii pentru potenţialele V_1, V_2 şi V_3 pe care le capătă conductorii la echilibru, luând în consideraţie efectele influenţei electrostatice dintre aceştia. Aplicăm aceeaşi metodă de superpoziţie a stărilor de echilibru, a căror sumă este echivalentă stării iniţiale a sistemului, reprezentate în Fig. 2.23. În fiecare dintre acestea, unul dintre conductori poartă sarcina pe care o are în sistemul iniţial în timp ce sarcinile celorlalţi doi conductori, sunt nule. Astfel, în prima stare de echilibru, pe conductorul (1) se află sarcina Q_1 iar potenţialele pe care le capătă cei trei conductori la echilibru,

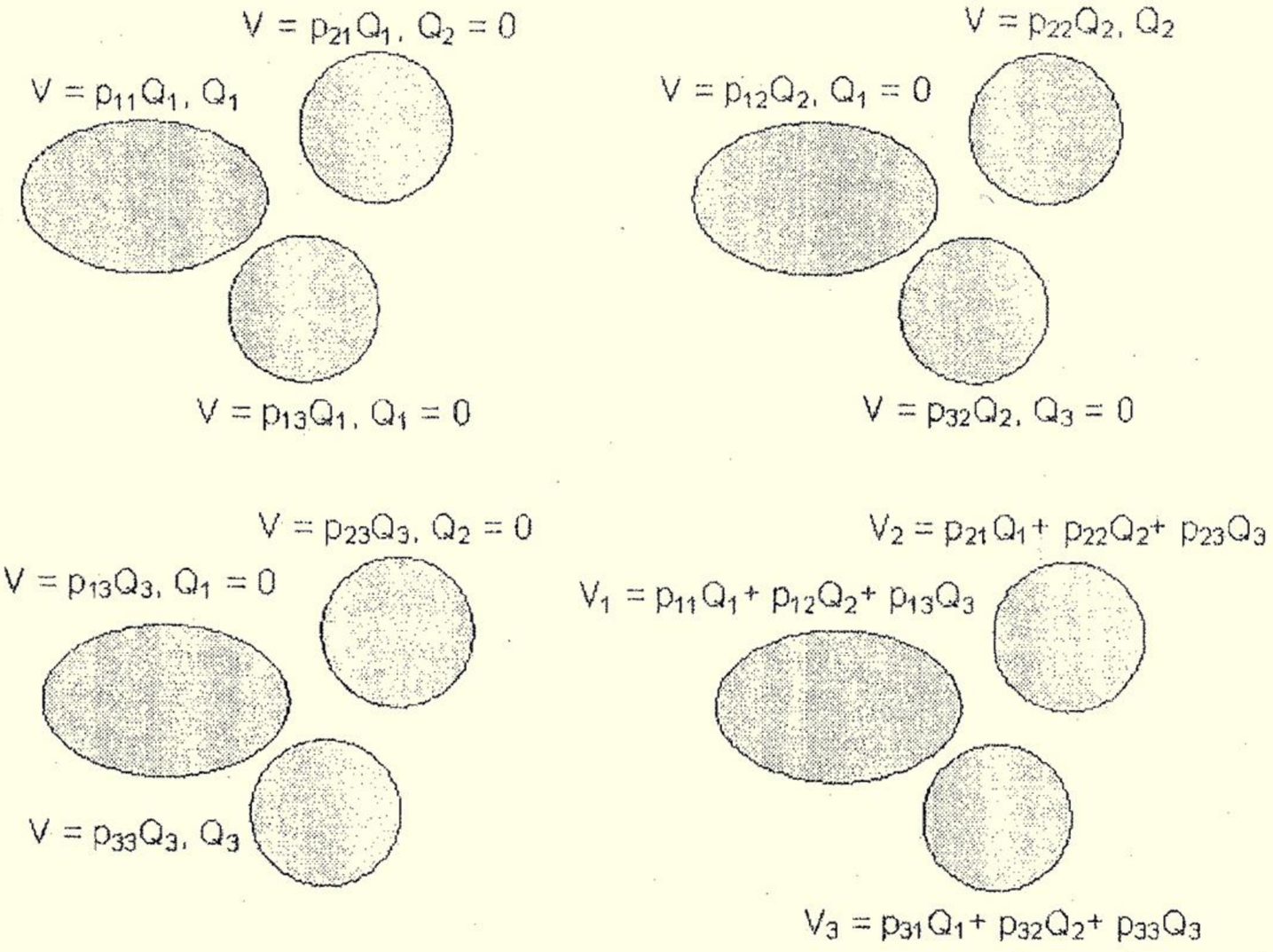


Figura 2.23: Metodei superpoziţiei stărilor de echilibru electrostatic aplicată pentru stabilirea relaţiei dintre potenţialele a trei conductori şi sarcinile lor

sunt proporţionale cu Q_1, respectiv: pe conductorul (1) potenţialul $p_{11}Q_1$, pe conductorul (2) potenţialul $p_{21}Q_1$ datorat sarcinii induse prin influenţă şi, pe conductorul (3) potenţialul $p_{31}Q_1$ datorat de asemenea sarcinii de influenţă. În a doua stare de echilibru, conductorul (2) poartă sarcina iniţială, Q_2 iar ceilalţi doi au sarcina nulă şi, în a treia stare, de echilibru conductorul (3) are sarcina Q_3 iar ceilalţi doi au sarcina nulă Fiecare dintre aceşti conductori capătă, în cele trei stări, potenţialele menţionate în Tabelul următor

Starea de echilibru	Potenţialul			Sarcina conductorului		
	(1)	(2)	(3)	(1)	(2)	(3)
I-a	V_1	0	0	$p_{11}V_1$	$p_{21}V_1$	$p_{31}V_1$
II-a	0	V_2	0	$p_{12}V_2$	$p_{22}V_2$	$p_{32}V_2$
III-a	0	0	V_3	$p_{13}V_3$	$p_{23}V_3$	$p_{33}V_3$

Sumând pe coloane sarcinile şi potenţialele corespunzătoare fiecărui conductor, reconstituim potenţialul fiecăruia dintre ei, ca funcţii liniare de sarcină după cum urmează:

$$\begin{aligned} V_1 &= p_{11}Q_1 + p_{12}Q_2 + p_{13}Q_3 \\ V_2 &= p_{21}Q_1 + p_{22}Q_2 + p_{23}Q_3 \\ V_3 &= p_{31}Q_1 + p_{32}Q_2 + p_{33}Q_3 \end{aligned} \tag{2.31}$$

Generalizând acest rezultat pentru un sistem de N de conductori în echilibru electrostatic obţinem expresia:

$$V_i = \sum_{j=1}^{N} p_{ij}Q_j. \tag{2.32}$$

Coeficienţii p_{ij} se numesc *coeficienţi de potenţial* şi semnificaţia lor este următoarea: Un coeficient de tipul p_{ii}, $(i = j)$, *reprezintă o mărime numeric egală cu potenţialul pe care îl capătă conductorul* (i) *când sarcina sa este egală cu unitatea* $(Q_i = 1coulomb)$ *iar sarcinile proprii ale tuturor celorlalţi conductori sunt nule.* Un coeficient de tipul p_{ij}, cu $(i \neq j)$, *reprezintă o mărime numeric egală cu potenţialul pe care îl capătă un conductor* (i) *când sarcina unui conductor vecin* (j) *este egală cu unitatea, în timp ce sarcinile proprii ale tuturor celorlalţi conductori sunt nule.* Pentru a sugera mai clar de cine depinde mărimea acestor coeficienţi p_{ij}, vom considera, într-un caz particular (Fig. 2.24) doi conductori, (i) şi (j) pe suprafeţele cărora, S_i, respectiv S_j, sunt distribuite sarcinile Q_i şi Q_j cu densităţile superficiale σ_i şi σ_j. Potenţialul la suprafaţa conductorului (i), datorat în general sarcinilor de pe conductorii vecini, (pentru care $i \neq j$), este dat de expresia

$$V_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{j=1}^{N} \int_{S_j} \frac{\sigma_j dS_j}{R_{ji}} \tag{2.33}$$

în care dS_j reprezintă elemente de suprafaţă de pe conductorii vecini (j), aflate la distanţele R_{ji} de elementul de suprafaţă dS_i de pe conductorul (i).

Această expresie mai poate fi scrisă sub forma următoare, după multiplicarea ambilor membri cu sarcina $Q_i = \int_{S_i} \sigma_i dS_i$:

$$V_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 Q_i} \sum_{j=1}^{N} \int_{S_i}\int_{S_j} \frac{\sigma_j dS_j \sigma_i dS_i}{R_{ji}} \tag{2.34}$$

În virtutea formulei generale (2.32) se deduce imediat expresia coeficientului de potenţial p_{ij}:

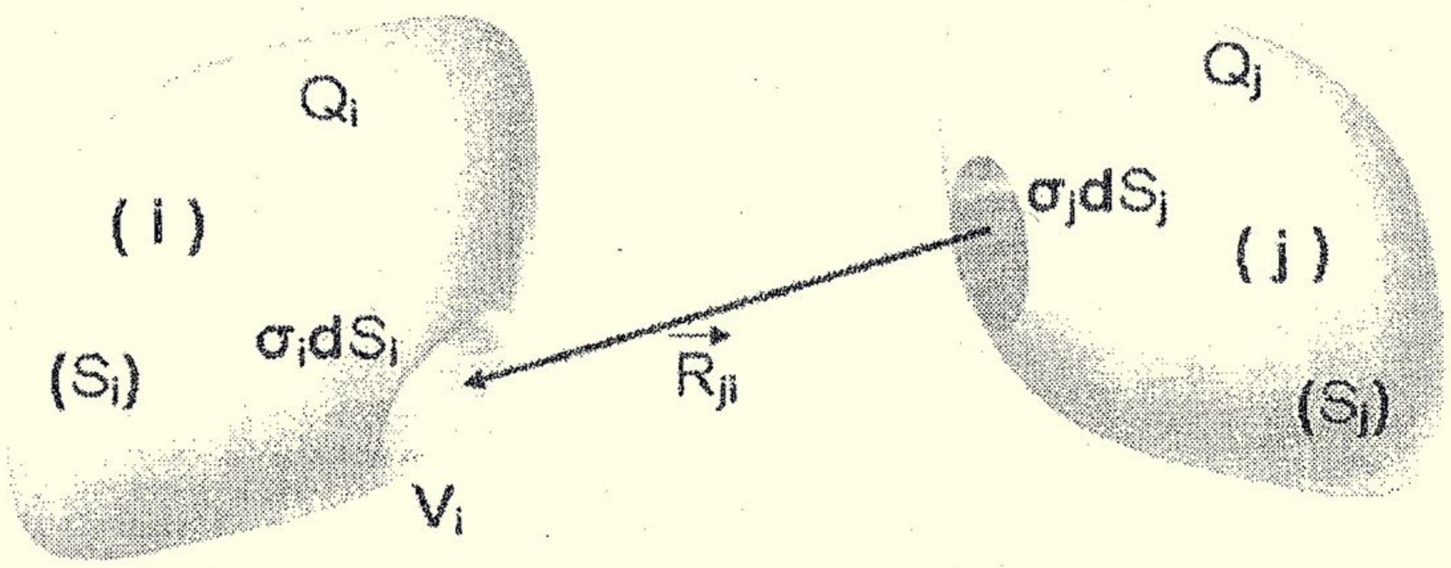


Figura 2.24: Pentru demonstrarea egalităţii coeficienţilor de potenţial $p_{ij} = p_{ji}$

$$p_{ij} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 Q_i Q_j} \int_{S_i} \int_{S_j} \frac{\sigma_i \sigma_j dS_i dS_j}{R_{ij}} \tag{2.35}$$

Se deduce din această expresie o proprietate a coeficienţilor de potenţial şi anume că

$$p_{ij} = p_{ji}. \tag{2.36}$$

2.15 Condensatorii electrici

Un experiment simplu poate sugera direct noţiunea de condensator electric: doi conductori plani, A şi B (Fig. 2.25), paraleli, sunt situaţi la o distanţă d care pate fi modificată. Conductorul B este fix şi conectat la sol ($V = 0$), iar conductorul A este mobil şi conectat la un electroscop prin intermediul unui fir conductor flexibil. Cu ajutorul unui corp de probă, se comunică o sarcină Q conductorului A şi astfel acesta este adus la potenţialul V. Electroscopul va indica o deviaţie θ. Micşorăm distanţa dintre conductori şi observăm că θ se micşorează. Se poate constata însă că sarcina Q rămâne constantă. Într-adevăr, dacă aducem conductorul A la distanţa iniţială d, deviaţia revine la valoarea ei iniţială θ. Acest experiment atestă faptul că, la sarcină constantă, micşorarea deviaţiei odată cu micşorarea distanţei se datorează efectiv micşorării diferenţei de potenţial, $(V - 0)$, dintre conductori. Cei doi conductori plani se află în condiţie de influenţă totală, deoarece

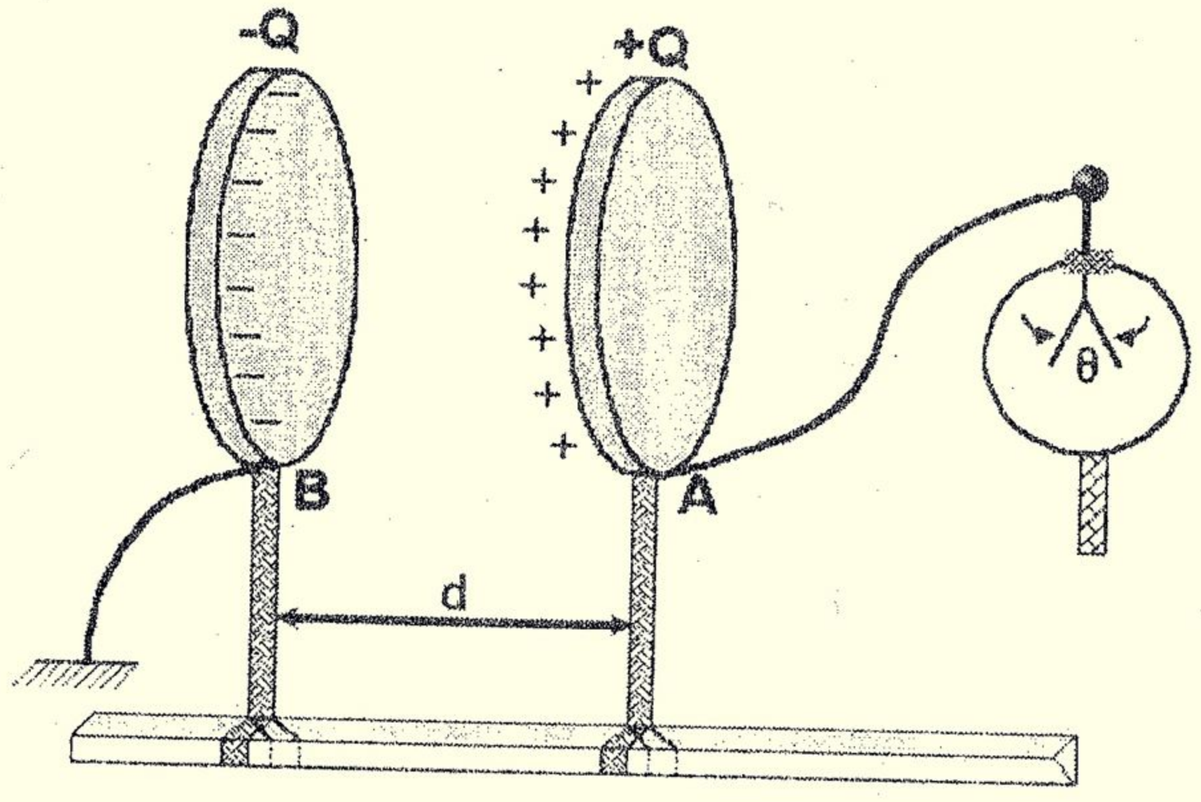


Figura 2.25: Experiment pentru evidenţierea capacităţii electrice a unui sistem de conductori

practic toate tuburile elementare de linii de câmp care se sprijină pe suprafaţa unui conductor îşi găsesc suprafeţe corespondente pe suprafaţa celuilalt; astfel sarcina indusă prin influenţă pe conductorul B este egală şi de semn contrar celui al sarcinii Q comunicate iniţial conductorului A. În aceste condiţii, se poate observa că, dacă diferenţa de potenţial (V) şi implicit deviaţia foiţelor electroscopului s-a micşorat (ca urmare a micşorării distanţei dintre suprafeţele conductorilor plani), se poate readuce deviaţia la valoarea iniţială, comunicând conductorului A o sarcină suplimentară. În final, diferenţa de potenţial atinge valoarea iniţială, V dar sarcina înmagazinată în sistem este mai mare. Totul se petrece ca şi cum micşorarea distanţei dintre conductori, antrenează o creştere a capacităţii sistemului de a condensa o sarcină mai mare. De aici, denumirea de condensator electric dată sistemului constituit din cei doi conductori numiţi *armăturile condensatorului*. Se înţelege astfel că, *la sarcină Q constantă*, micşorarea diferenţei de potenţial de n ori, (de la V la $V' = V/n$) antrenează în mod necesar o creştere de acelaşi număr de ori a capacităţii condensatorului:

$$Q = CV = C'V' = (nC)\left(\frac{V}{n}\right) \tag{2.37}$$

Pe de altă parte, la potenţial constant, este posibilă înmagazinarea unei sarcini Q' de n ori mai mare deât Q numai dacă se măreşte de acelaşi număr

de ori capacitatea sistemului:

$$V = \frac{Q}{C} = \frac{Q'}{C'} = \frac{(nQ)}{(nC)} \tag{2.38}$$

In concluzie, un sistem de doi conductori situaţi în condiţii de influenţă totală formează un condensator. Capacitatea unui condensator poate fi exprimată în funcţie de coeficienţii de potenţial sau de coeficienţii de capacitate. Pentru acest caz formulele generale (2.32) se reduc la

$$\begin{aligned} V_1 &= p_{11}Q_1 + p_{12}Q_2 \\ V_2 &= p_{21}Q_1 + p_{22}Q_2 \end{aligned} \tag{2.39}$$

în care V_1 şi V_2, (cu $V_1 > V_2$) sunt potenţialele armăturilor condensatorului. În condiţiile influenţei totale, sarcinile de pe armături sunt egale şi de semn contrar, $Q_1 = Q$ respectiv $Q_2 = -Q$ şi, ţinând seama de relaţia (2.40), se deduce imediat din că diferenţa de potenţial dintre armături este,

$$V_1 - V_2 = (p_{11} + p_{22} - 2p_{12})\, Q,$$

de unde rezultă *expresia capacităţii condensatorului în funcţie de coeficienţii de potenţial*:

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{1}{p_{11} + p_{22} - 2p_{12}} \tag{2.40}$$

În cazul în care conductorii au configuraţii geometrice simple, coeficienţii de potenţial p_{11}, p_{22} şi p_{12} $(= p_{21})$ pot fi definiţi direct în funcţie de capacitatea conductorilor, apelând la acelaşi principiu al superpoziţiei stărilor de echilibru. Mai întâi considerăm *în primă aproximaţie* că distanţa dintre cei doi conductori este suficient de mare pentru ca aceştia să poată fi consideraţi izolaţi. În această aproximaţie capacităţile lor, C_1 şi C_2, pot fi exprimate în funcţie de sarcinile Q_1, Q_2 şi de potenţialele lor V_1 şi V_2

$$V_1 = \frac{Q_1}{C_1} \qquad\qquad V_2 = \frac{Q_2}{C_2}$$

În *a doua aproximaţie* apropiem conductorii la o distanţă r suficientă pentru ca fenomenul de influenţă să modifice aceste potenţiale. Astfel, potenţialului conductorului (1) i se adaugă potenţialul datorat sarcinii Q_2 de pe conductorul vecin şi reciproc, potenţialului conductorului (2) i se adaugă potenţialul

sarcinii Q_1

$$V_1 = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad (2.41)$$
$$V_2 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{Q_2}{C_2}$$

Din comparaţia formulelor (2.42) şi (2.40), rezultă următoarele expresii pentru coeficienţii p_{ij}:

$$p_{11} = \frac{1}{C_1} \quad p_{22} = \frac{1}{C_2} \quad p_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r} = p_{21}$$

Dacă $Q_1 = -Q_2$, capacitatea sistemului este dată de formula (2.40) care, cu expresiile găsite pentru coeficienţii p_{ij}, devine:

$$C = \frac{1}{p_{11} + p_{22} - 2p_{12}} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} - \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 r}} \qquad (2.42)$$

Considerând conductorii de formă sferică, având razele R_1 şi R_2, capacităţile lor sunt date de formula (2.29) şi expresia generală a capacităţii sistemului (2.42) devine:

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - \frac{2}{R}}. \qquad (2.43)$$

2.16 Calculul capacităţii condensatorilor

În funcţie de datele iniţiale, pot fi utilizate următoarele metode pentru calculul capacităţii unui condensator:

a) Se cunoaşte sarcina Q de pe o armătură: În acest caz se aplică teorema lui Gauss pentru o suprafaţă S intermediară între armături, sarcina Q fiind interioară: $\int_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{dR} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$. De aici rezultă $\vec{E}$. Se determină apoi diferenţa de potenţial, evaluând circulaţia vectorului $\vec{E}$ pe distanţa e dintre armături, $\int_0^e \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} = V_1 - V_2$, de unde, în final, $C = Q/(V_1 - V_2)$. Prin această metodă pot fi introduse într-o manieră generală noţiunile de *reluctanţă* şi de *permeanţă* dielectrică, noţiuni utilizate în electrotehnică: Considerăm de exemplu două suprafeţe echipotenţiale V_1 şi V_2, care pot fi armăturile unui condensator, şi un tub de linii de câmp între aceste suprafeţe.

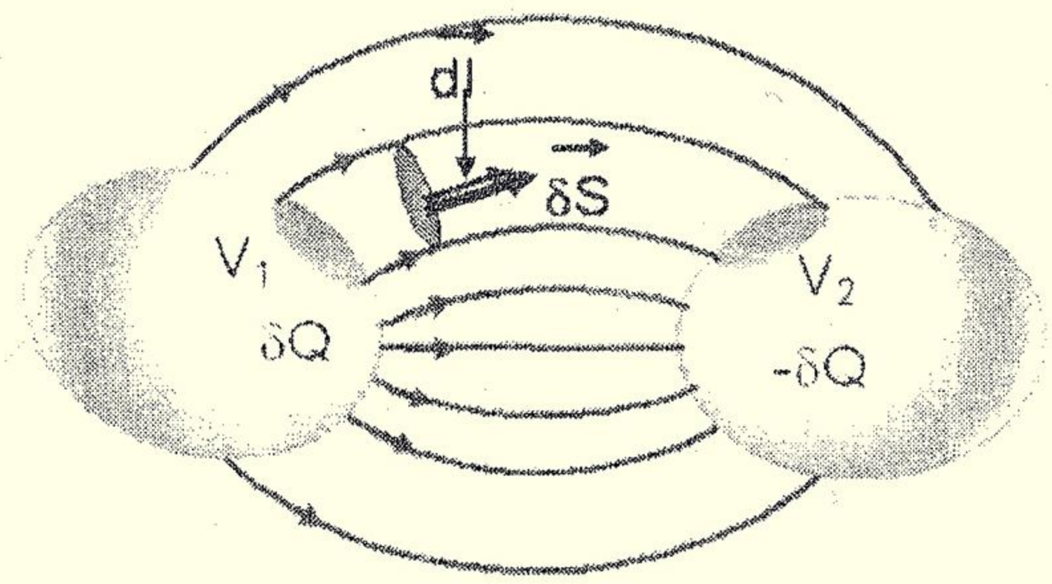


Figura 2.26: Pentru introducerea noţiunii de reluctanţă electrică

În conformitate cu teorema lui Gauss, fluxul câmpului electric prin elementul de suprafaţă δS, definit de tubul de linii de câmp infinitesimal, este constant de-a lungul tubului şi egal cu $d\Phi = \vec{E} \cdot \overrightarrow{\delta S} = \delta Q/\varepsilon_0$ sau, ţinând cont de faptul că $\varepsilon_0 \vec{E} = \vec{D}$, fluxul vectorului inducţie electrică $\vec{D}$ prin acelaşi element de suprafaţă este

$$\vec{D} \cdot \overrightarrow{\delta S} = \delta Q. \tag{2.44}$$

Pe de altă parte, circulaţia vectorului $\vec{E}$ pe o porţiune elementară $\overrightarrow{dl}$ din lungimea tubului este

$$\vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} = -dV = \frac{\vec{D} \cdot \overrightarrow{dl}}{\varepsilon_0} \tag{2.45}$$

Din ultimele două relaţii şi ţinând cont că $\overrightarrow{dl}$ şi $\overrightarrow{\delta S}$ sunt vectori coliniari (Fig. 2.26) obţinem:

$$\frac{-dV}{\delta Q} = \frac{dl}{\varepsilon_0 \delta S}, \tag{2.46}$$

şi, pentru tubul de linii de câmp cuprins între echipotenţialele V_1 şi V_2, acest raport devine

$$\frac{V_1 - V_2}{\vec{D} \cdot \overrightarrow{\delta S}} = \int_1^2 \frac{dl}{\varepsilon_0 \delta S} \tag{2.47}$$

Se va vedea în capitolele următoare că expresia (2.47) este asemănătoare cu cea a *rezistenţei electrice* a unui conductor de lungime dl şi de secţiune elementară dS, respectiv $\frac{dl}{\gamma \delta S}$ în care γ reprezintă conductivitatea conductorului,

deosebirea constând în faptul că, în loc de conductivitatea γ, aici apare permitivitatea mediului dintre cele două suprafeţe echipotenţiale, respectiv ε_0 în cazul vidului. Prin analogie expresia (2.47) se numeşte *reluctanţa electrică* a tubului de linii de câmp, şi ea reprezintă o mărime numeric egală cu raportul dintre diferenţa de potenţial aplicată la extremităţile tubului şi fluxul inducţiei electrice care traversează acest tub. Se poate observa cu uşurinţă că inversul acestui raport este omogen cu cel al unei capacităţi electrice şi este numit *permeanţă dielectrică* a tubului,

$$\frac{\vec{D}\cdot\overrightarrow{\delta S}}{V_1-V_2}=\frac{\delta Q}{V_1-V_2}=\frac{1}{\int_1^2\frac{dl}{\varepsilon_0\delta S}} \tag{2.48}$$

Dacă echipotenţialele V_1 şi V_2 sunt suprafeţe de conductori, expresia (2.48) reprezintă capacitatea corespunzătoare permeanţei tubului de linii de câmp cuprins între aceste echipotenţiale. Capacitatea totală a condensatorului va corespunde ansamblului tuburilor de linii de câmp juxtapuse în paralel între aceleaşi două echipotenţiale (sau armături) ale condensatorului, sau altfel spus, ea va corespunde permeanţei totale. Aceasta va fi dată de integrala relativă la întreaga suprafaţă S a armăturii:

$$C=\int_S\frac{1}{\int_1^2\frac{dl}{\varepsilon_0 dS}} \tag{2.49}$$

Expresia (2.49) este mai potrivită pentru calculul capacităţii în cazurile particulare în care tuburile de linii de câmp au forme adecvate pentru a permite un calcul simplu al integralei.

b) Se cunoaşte funcţia de distribuţie a potenţialului între armăturile condensatorului: În *aceste cazuri* se aplică teorema lui Coulomb referitoare la câmpul electric în vecinătatea unui conductor, $\vec{E}=(\sigma/\varepsilon_0)\,\vec{n}$, în care σ este sarcina de pe suprafaţa conductorului, iar câmpul electric $\vec{E}$, normal pe suprafaţă, poate fi cunoscut, fiind o funcţie de potenţialul dat: Astfel, pentru fiecare dintre armăturile (1) şi (2) ale condensatorului, sarcinile $Q_{1,2}=\int_{S_1,S_2}\sigma_{1,2}dS_{1,2}$ pot fi determinate în funcţie de potenţialul armăturii, din relaţia,

$$\sigma_{1,2}=-\varepsilon_0\left(\frac{dV}{dz}\right)_{z=z_1,z_2}, \tag{2.50}$$

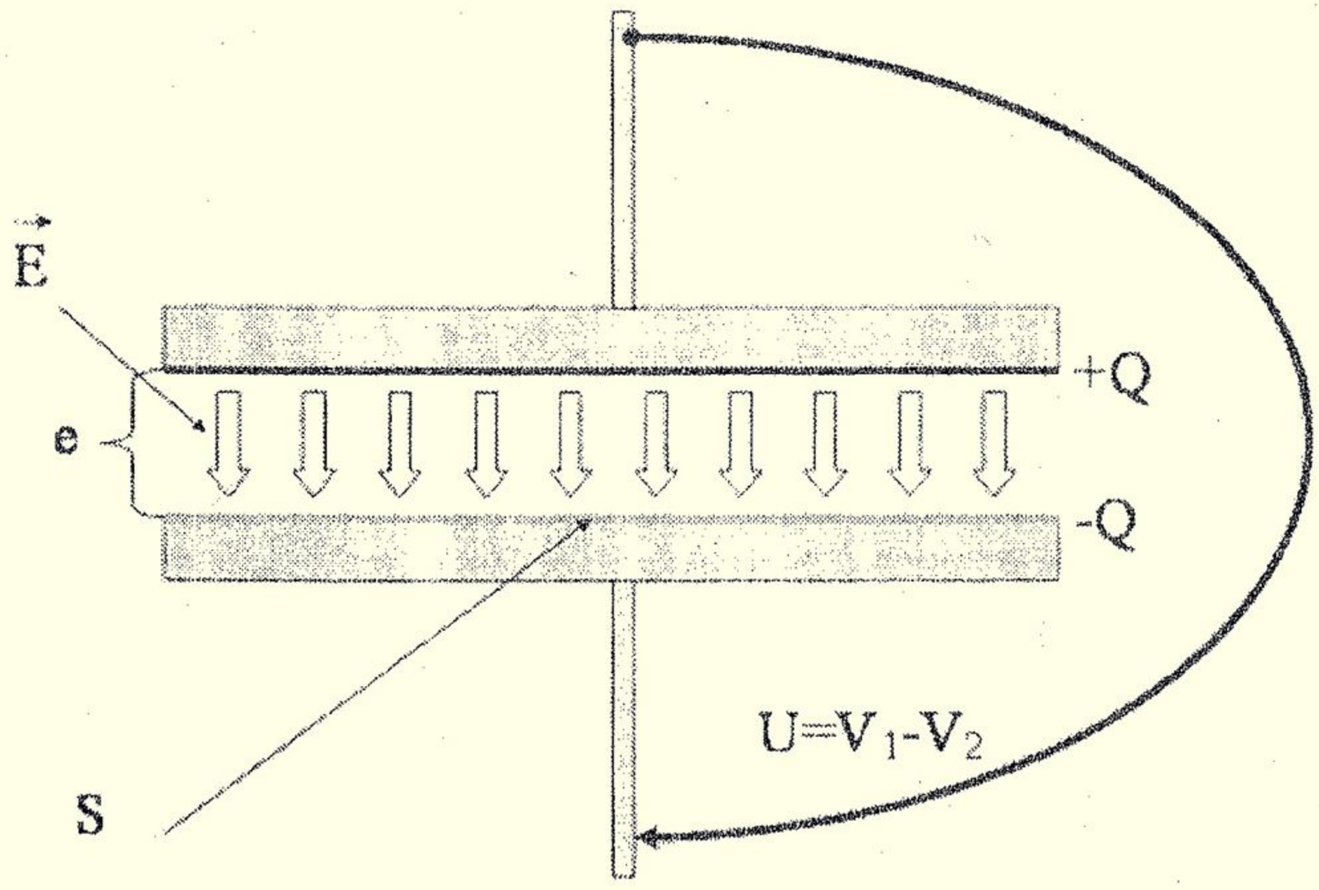


Figura 2.27: Condensatorul plan

în care z este variabila pe direcţia normală la suprafaţa armăturii. În final, $C = Q/(V_1 - V_2)$.

c) Se cunoaşte energia electrostatică localizată între armăturile condensatorului. Se va vedea în capitolele următoare că această energie poate fi exprimată în două forme:

$$W = \frac{1}{2}C(V_1 - V_2)^2 \qquad \text{şi} \qquad W = \frac{1}{2}\int_v \varepsilon_0 E^2 dv, \tag{2.51}$$

în care v este volumul dintre armături. De aici se poate calcula capacitatea condensatorului.

În cele ce urmează, utilizând aceste metode, vom calcula capacitatea unor condensatori, armăturile cărora au forme geometrice simple: plan, sferă cilindru.

2.16.1 Condensatorul plan

Prin construcţie, *condensatorul plan* este alcătuit din două armături plane, paralele, de suprafaţă S, situate la o distanţă dată e (Fig.2.27).

Calculul capacităţii acestui condensator poate fi efectuat, utilizând oricare dintre cele trei metode menţionate mai sus:

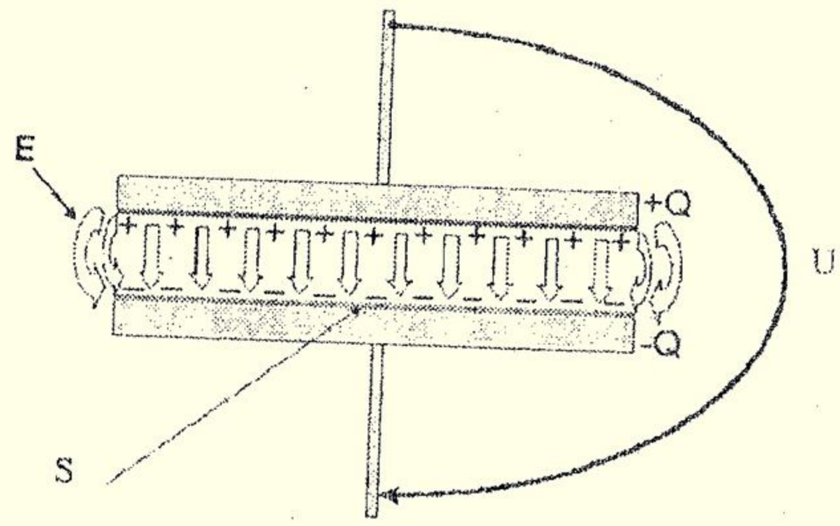


Figura 2.28: Efectul marginilor suprafeţei armăturilor asupra distribuţiei liniilor de câmp electric

a) *Prima metodă* (în care se cunoaşte sarcina Q): Este suficient să se observe că liniile de câmp sunt perpendiculare pe ambele armături, (exceptând marginile suprafeţelor acestor armături), şi ca urmare secţiunea dS a oricărui tub elementar este constantă. În acest caz expresia (2.49) se scrie,

$$C = \int_S \frac{dS}{\int_0^e \frac{dl}{\varepsilon_0}} = \frac{\epsilon_0 S}{e} \tag{2.52}$$

După efectuarea integralei şi ţinînd cont de faptul că sarcina totală de pe armătură este $Q = \int dQ$, găsim:

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{\varepsilon_0 S}{e}. \tag{2.53}$$

Acest rezultat s-a obţinut neglijând efectul marginilor suprafeţelor, unde în general câmpul electric nu este uniform. Aproximaţia este bună dacă distanţa e dintre armături este foarte mică sau dacă suprafaţa armăturilor este foarte mare. În cazul în care armăturile au suprafeţe finite, reţeaua de echipotenţiale are alura din Fig. 2.28. Liniile de câmp, fiind perpendiculare pe suprafeţele echipotenţiale, nu vor mai corespunde unui câmp uniform, exceptând regiunea centrală dintre armături. Calculul arată că, în cazul armăturilor de forma unui pătrat cu latura suprafeţei egală cu distanţa dintre armături, câmpul poate fi considerat uniform cu o precizie de 10^{-4}. Se poate aprecia de aici că, în numeroase aplicaţii, perturbaţiile datorate marginilor pot fi neglijate deoarece în condensatorii uzuali distanţa dintre armături este de regulă foarte mică în comparaţie cu dimensiunile armăturilor.

În experimentele în care efectul marginilor este important, acesta poate fi eliminat, dispunând coplanar cu una dintre armături, (presupusă de exemplu

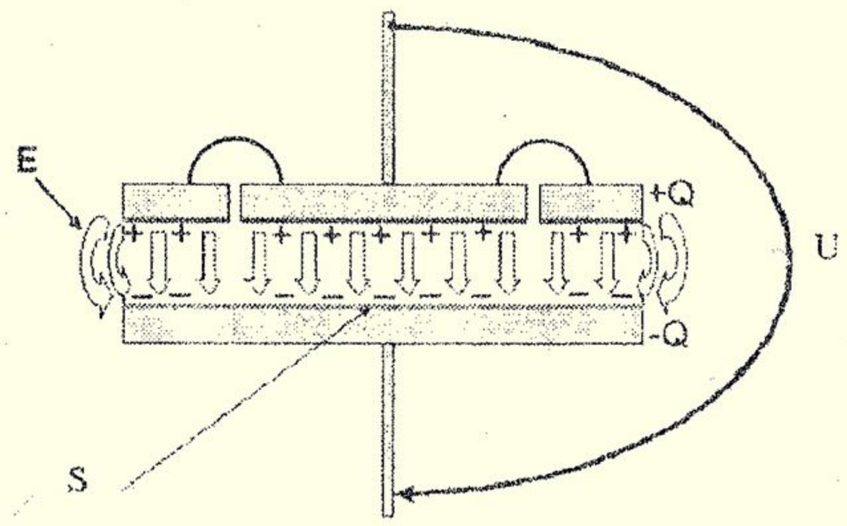


Figura 2.29: Rolul inelului de gardă pentru uniformizarea câmpului la marginile suprafeţei armăturilor condensatorului

sub forma de disc de suprafaţă S), un conductor sub forma de inel separat de armătură printr-un interstiţiu foarte mic. Acest inel, numit *inel de gardă*, este conectat la acelaşi potenţial cu cel al armăturii. Suprafaţa celeilalte armături trebuie sa aibă diametrul egal sau mai mare decât cel al inelului de gardă (Fig.2.29). În acest mod, câmpul normal la suprafaţa S a discului înconjurat de inelul de gardă este în întregime uniform şi capacitatea condensatorului este cea dată de relaţia (2.53).

b) *A doua metodă.* (Se cunoaşte funcţia de distribuţie a potenţialului între armături): Expresia echipotenţialelor unei distribuţii de sarcină repartizate uniform pe suprafaţa unui plan infinit, poate fi scrisă într-o manieră generală sub forma

$$V = Az + B \tag{2.54}$$

Aceste echipotenţiale sunt plane perpendiculare pe direcţia câmpului, respectiv pe direcţia axei $z'z$ (Fig. 2.30). În condiţiile câmpului uniform dintre armăturile unui condensator plan, pot fi materalizate două echipotenţiale care să coincidă exact cu armăturile, acestea fiind situate, una în origine $z = 0$ şi cealaltă la distanţa $z = e$, în care e este efectiv distanţa dintre armături. Condiţiile la limite $V = V_1$ pentru $z = 0$ şi $V = V_2$ pentru $z = e$, permit determinarea constantelor A şi B. Formula generală (2.54) particularizată pentru aceste condiţii dă $V_1 = B$ respectiv $V_2 = Ae + B$, de unde rezultă

$$A = \frac{V_2 - V_1}{e}. \tag{2.55}$$

Sarcina corespunzătoare unei armături poate fi determinată utilizând relaţia (2.50):

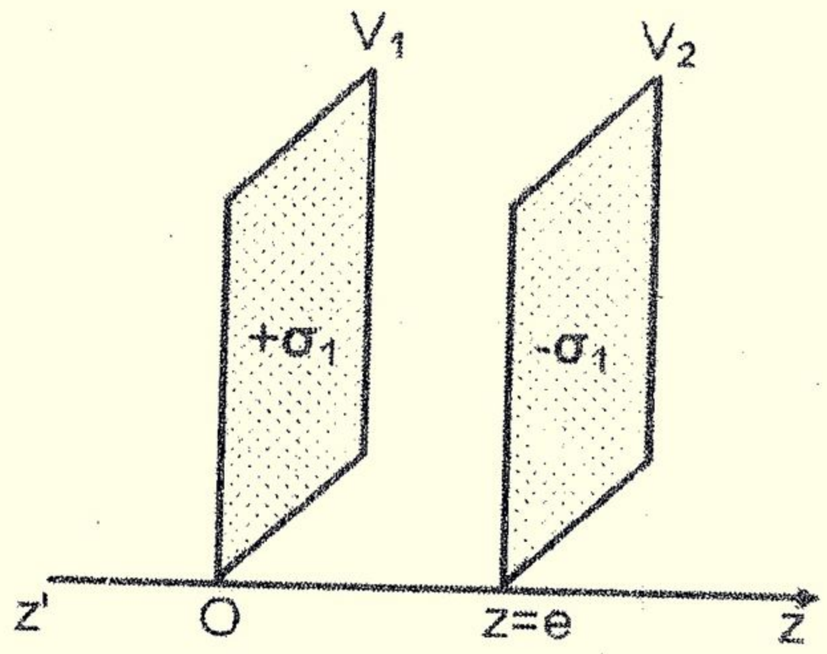


Figura 2.30: Pentru calculul capacităţii condensatorului plan

$$\sigma_1 = -\varepsilon_0 \left(\frac{dV}{dz}\right)_{z=0} = -\varepsilon_0 A \tag{2.56}$$

Din ultimele două relaţii şi ţinând cont că $Q_1 = \int_S \sigma_1 dS$, obţinem imediat expresia capacităţii condensatorului plan

$$C = \frac{Q_1}{V_1 - V_2} = \frac{\varepsilon_0 S}{e}$$

c) *A treia variantă* (se cunoaşte energia electrostatică localizată în volumul dintre armături). Formulele (2.51), particularizate pentru energia distribuită uniform în volumul $v = Sz$ dintre armăturile de suprafaţă S ale condensatorului plan ne permit să scriem egalitatea:

$$C(V_1 - V_2)^2 = \varepsilon_0 S \int_0^e E^2 dz$$

În condiţiile câmpului uniform în volumul $v = Se$ dintre armături, expresiile $E^2 = (V_1 - V_2)^2/e^2$ şi relaţia precedentă dau expresia capacităţii condensatorului plan $C = \varepsilon_0 S/e$.

2.16.2 Condensatorul cilindric

Doi conductori cilindrici, coaxiali, având razele R_1 şi R_2, (cu $R_2 > R_1$), şi lungimea L, constituie un condensator cilindric (Fig. 2.31). Pentru a eluda chestiunea neuniformităţii câmpului dintre cele două armături, posibilă

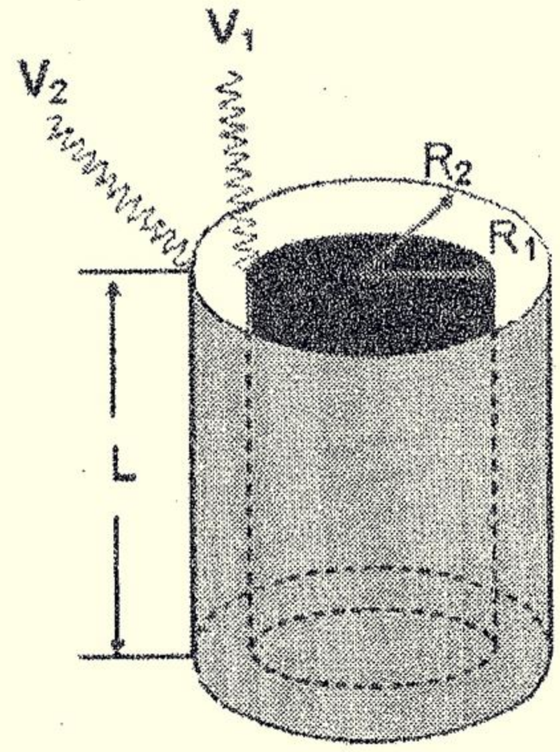


Figura 2.31: Condensatorul cilindric

la extremitaţile cilindrilor, vom presupune de la început că razele lor sunt foarte apropiate sau că lungimea cilindrilor este foarte mare (practic infinită) in comparaţie cu raza. Calculul capacităţii condensatorului cilindric poate fi efectuat, ca şi în cazul precedent, prin oricare dintre cele trei metode, alegerea fiind în funcţie de datele cunoscute a priori.

a) *Se cunoaşte sarcina Q a unei armături*: De exemplu, pe armătura interioară de rază R_1, se află sarcina $+Q_1$ la potenţialul V_1, armătura exterioară de rază R_2 aflându-se la potenţialul V_2. Deoarece câmpul electric $\vec{E}$ are o simetrie radială, calculul câmpului radial E_R va fi simplu dacă aplicăm teorema lui Gauss pentru o suprafaţă cilindrică de rază R şi de lungime L, considerată a fi plasată între armături, $(R_1 < R < R_2)$. Astfel, $\Phi = E_R 2\pi RL = Q_1/\varepsilon_0$ şi

$$E_R = \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 L}\frac{1}{R} \tag{2.57}$$

Se determină apoi diferenţa de potenţial, ştiind că $-dV = E_R dR$,

$$V_1 - V_2 = \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 L}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dR}{R} = \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 L}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

şi de aici, *expresia capacităţii condensatorului cilindric*:

$$C = \frac{Q_1}{V_1 - V_2} = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}. \tag{2.58}$$

b) Se cunoaşte distribuţia potenţialului electric: O expresie pentru potenţialul electric în cazul sistemelor cu simetrie cilindrică a fost deja stabilită şi s-a văzut că acesta este un potenţial logaritmic. Într-o manieră generală potenţialul electric într-un punct exterior unui cilindru (considerat infinit), la distanţa R de axa cilindrului, este de forma

$$V = A \ln R + B \tag{2.59}$$

Admiţând că sunt satisfăcute integral condiţiile de influenţă totală, constantele A şi B pot fi determinate riguros cunosând condiţiile la limite: $V = V_1$ pentru $R = R_1$, şi $V = V_2$ pentru $R = R_2$. Astfel,

$$\begin{aligned} V_1 &= A \ln R_1 + B \\ V_2 &= A \ln R_2 + B \end{aligned}$$

şi

$$V_1 - V_2 = -A \ln \frac{R_2}{R_1} \tag{2.60}$$

Utilizând relaţia (2.50), determinăm sarcina de pe armătura interioară. Astfel, cu

$$\sigma_1 = -\varepsilon_0 \left(\frac{dV}{dR}\right)_{R=R_1} = -\varepsilon_0 \frac{A}{R} \tag{2.61}$$

obţinem, pentru cilindrul de lungime L

$$Q_1 = \int_{S_1} \sigma_1 dS = 2\pi R_1 L \left(-\varepsilon_0 \frac{A}{R}\right) = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln \frac{R_2}{R_1}} (V_1 - V_2) \tag{2.62}$$

şi, în final

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln \frac{R_2}{R_1}}. \tag{2.63}$$

c) *Se cunoaşte densitatea volumică de energie electrostatică* dintre armături. În virtutea formulelor (2.51) se poate scrie relaţia

$$C(V_1 - V_2)^2 = \int_v \varepsilon_0 E^2 dv \tag{2.64}$$

Cu E definit mai sus din teorema lui Gauss şi cu $dv = 2\pi L R dR$ relaţia precedentă devine

$$C(V_1 - V_2)^2 = \frac{Q^2}{2\pi\varepsilon_0 L} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dR}{R}$$

de unde rezultă aceeaşi expresie pentru capacitatea condensatorului cilindric.

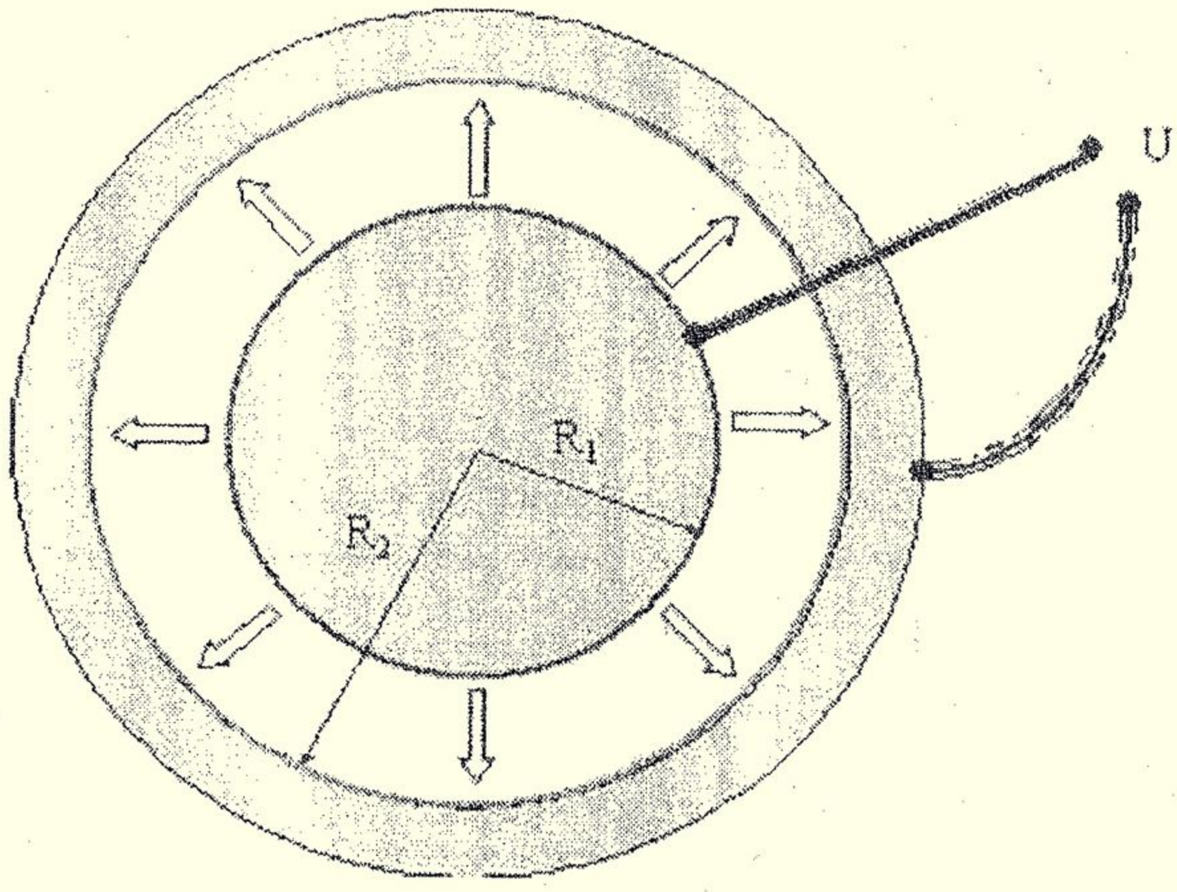


Figura 2.32: Condensatorul sferic

2.16.3 Condensatorul sferic

Un sistem de doi conductori sferici, concentrici, dintre care cel interior, de rază R_1 se află la potenţialul V_1 iar cel exterior de rază R_2 la potenţialul V_2 se numeşte condensator sferic (Fig. 2.32).

a) Dacă *se cunoaşte sarcina* Q de pe armătura interioară, se aplică teorema lui Gauss pentru a determina fluxul electric printr-o suprafaţă sferică de rază R intermediară între cele două armături, pentru a determina câmpul radial $\vec{E}_R$. Apoi, circulaţia acestui câmp pe distanţa $R_2 - R_1$ va da diferenţa de potenţial dintre armături şi, în final, raportul sarcinii la această diferenţă de potenţial dă capacitatea condensatorului sferic: Astfel,

$$\Phi = \int_S E_R dS = 4\pi R^2 E_R = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \text{şi} \quad E_R = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R^2} \tag{2.65}$$

$$\int_{R_1}^{R_2} E_R dR = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dR}{R^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} = V_1 - V_2 \tag{2.66}$$

Din ultima variantă a acestor egalităţi se determină capacitatea condensatorului sferic:

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}. \tag{2.67}$$

b) *Se cunoaşte funcţia de distribuţie a potenţialelor* sistemelor cu simetrie sferică. S-a văzut în Capitolul precedent că echipotenţialele distribuţiilor superficiale sferice de sarcină sunt sfere concentrice şi ele pot fi exprimate în general sub forma următoare,

$$V = \frac{A}{R} + B \tag{2.68}$$

în care constantele A şi B pot fi definite din condiţiile la limite: $V = V_1$ pentru $R = R_1$ şi $V = V_2$ pentru $R = R_2$. Acestea dau

$$V_1 - V_2 = A\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \tag{2.69}$$

Sarcina de pe armătura interioară este

$$Q = \int_{S_1} \sigma_1 dS_1 = 4\pi R_1^2 \sigma_1$$

în care

$$\sigma_1 = -\varepsilon_0 \left(\frac{dV}{dR}\right)_{R=R_1} = \varepsilon_0 \frac{A}{R_1^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2}$$

Din ultima variantă a acestor egalităţi se deduce $A = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}$ şi, după calculesimple se obţine expresia a capacităţii condensatorului cilindric.

c) *Se cunoaşte densitatea volumică de energie.* Utilizăm aceeaşi relaţie (2.51) ca în cazurile precedente,

$$C(V_1 - V_2)^2 = \int_v \varepsilon_0 E^2 dv$$

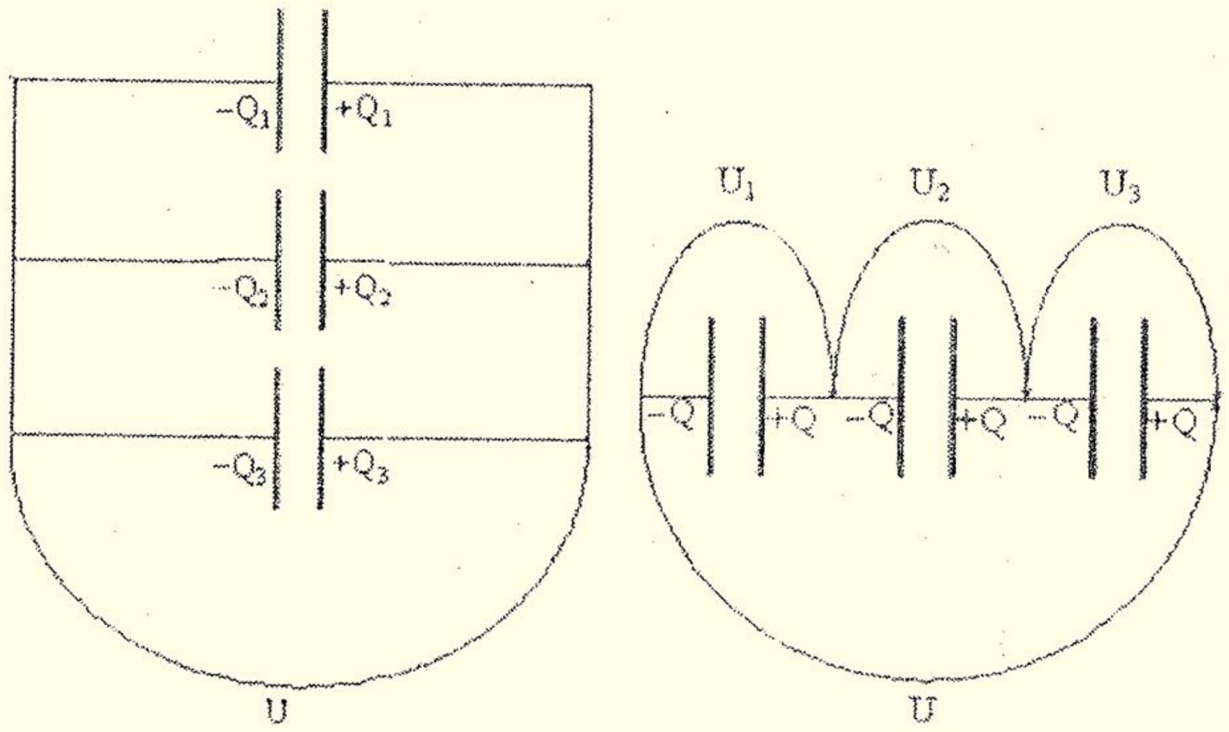
în care E este definit conform teoremei lui Gauss şi cu, $dv = 4\pi R^2 dR$ se obţine

$$C(V_1 - V_2)^2 = \frac{Q_1^2}{4\pi\varepsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dR}{R^2}$$

şi de aici rezultă aceeaşi expresie pentru capacitatea condensatorului sferic.

2.17 Gruparea condensatorilor

O grupare de condensatori este echivalentă cu un condensator unic a cărui capacitate poate fi calculată ţinând cont de modul de grupare a acestora în paralel sau în serie.



(a) Gruparea in paralel a condensatorilor

(b) Gruparea în serie a condensatorilor

Figura 2.33: Gruparea condensatorilor

1) *Gruparea în paralel*: În această grupare armăturile tuturor condensatorilor se află la aceeaşi diferenţă de potenţial, $V_1 - V_2$, (Fig. 2.33(a)). În acest mod armăturile lor vor constitui efectiv două suprafeţe echipotenţiale unice V_1 şi V_2 între care tuburile de linii de câmp corespunzătoare fiecărui condensator sunt juxtapuse în paralel, iar capacitatea totală va corespunde sumei acestora relativă suprafaţa întregii echipotenţiale. S-ar deduce astfel, în conformitate cu formula generală că, în cazul a n condensatori legaţi în paralel, capacitatea totală a grupului este egală cu suma capacităţilor componente:

$$C = \sum_{i=1}^{n} C_i \tag{2.70}$$

Într-adevăr, fiind dată sarcina fiecărui condensator,

$$\begin{aligned} Q_1 &= C_1 (V_A - V_B) \\ Q_2 &= C_2 (V_A - V_B) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ Q_n &= C_n (V_A - V_B) \end{aligned}$$

sarcina totală Q este egală cu suma acestor sarcini

$$Q = \sum\nolimits_1^n Q_i = (V_A - V_B) \sum\nolimits_1^n C_i$$

şi capacitatea totală de $C = Q/(V_A - V_B)$. Deci, în general, prin gruparea în paralel a condensatorilor, valoarea capacităţii totale este egală cu suma valo-

rilor capacităţilor componente. Dacă fiecare dintre cei n condensatori grupaţi în paralel are aceeaşi capacitate, $C_i = C_0$, capacitatea totală a bateriei este,

$$C = nC_0.$$

Deci, prin gruparea în paralel a n condensatori identici, se obţine o capacitate de n ori mai mare. Această grupare este convenabilă când se doreşte obţinerea unei capacităţi mai mari decât capacitatea unui singur condensator, la o tensiune care nu depăşeşte valoarea maximă admisă pentru fiecare dintre aceştia.

2) *Gruparea în serie.* În această grupare sarcina fiecărui condensator este aceeaşi, $\pm Q$ pentru fiecare (Fig. 2.33(b)), datorită fenomenului de influenţă totală, în timp ce diferenţa de potenţial, $U = V_A - V_B$, la care se află întreaga baterie de condensatori, este repartizată pe fiecare condensator după legea

$$U_i = \frac{Q}{C_i}$$

Astfel, pentru p condensatori în serie, avem relaţia:

$$U = \sum_{i=1}^{p} U_i = Q \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{C_i}.$$

De aici rezultă expresia capacităţii C a întregii baterii de condensatori legaţi în serie:

$$\frac{1}{C} = \frac{V_A - V_B}{Q} = \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{C_i} \qquad (2.71)$$

Prin *gruparea în serie, inversul valorii capacităţii totale este egală cu suma inverselor valorilor capacităţilor componente.* Dacă toţi cei p condensatori au aceeaşi valoare a capacităţii, $C_i = C_0$, relaţia (2.71) dă, $1/C = p/C_0$. Prin urmare, prin gruparea în serie a p condensatori identici, se obţine o capacitate micşorată de p ori.

$$C = \frac{C_0}{p}$$

Această grupare este convenabilă în cazul în care tensiunea de la bornele bateriei este de maximum p ori mai mare decât tensiunea admisă de fiecare condensator.

Dat fiind faptul că gruparea în serie reduce capacitatea, în timp ce gruparea în paralel o măreşte, *o grupare mixtă, serie-paralel a condensatorilor*

permite să se obţină orice valoare convenabilă a capacităţii bateriei. Calculul capacităţii unei grupări mixte este posibil cu ajutorul formulelor (2.70) şi (2.71), deoarece aceasta grupare poate fi descompusă în cele două tipuri de grupări descrise mai sus. În cazul în care n grupuri de condensatori sunt conectate în paralel la aceeaşi diferenţă de potenţial, fiecare grup conţinând p condensatori identici de capacitate C_0 legaţi în serie, capacitatea totală este

$$C = \frac{nC_0}{p}$$

iar diferenţa de potenţial maximă suportată de acest grup este $V_A - V_B = pU_0$, unde U_0 reprezintă diferenţa de potenţial maximă pe care o poate suporta un condensator fără să se producă descărcări electrice între armături.

Aplicaţii. Probleme

1. În apropierea unei sfere conductoare izolate se află o sarcină electrică punctiformă Q. Datorită fenomenului de influenţă electrostatică, sarcinile electrice de pe sferă se distribuie în aşa fel încât în interiorul conductorului câmpul la echilibru să fie nul. Să se determine densitatea superficială de sarcină de pe sfera conductoare şi sarcina totală de influenţă. Se cunoaşte raza sferei conductoare, ρ, şi distanţa dintre centrul sferei şi sarcina Q, z_1.

2. Calculaţi utilizând metoda imaginilor densitatea de sarcină de pe o sferă conductoare aflată în câmp electric uniform.

3. În interiorul unei sfere conductoare izolate şi neîncărcate cu sarcini electrice se află două cavităţi sferice în centrul cărora se găsesc sarcinile punctiforme, q_1 şi q_2. În exteriorul sferei se află o sarcină punctiformă q_3. Calculaţi forţele care acţionează asupra fiecăreia dintre cele trei sarcini electrice dacă elementele geometrice ale sistemului sunt cunoscute.

4. În apropierea unui conductor plan infinit, legat la Pământ se află o sarcină electrică punctiformă, Q. Să se calculeze poziţia punctului în care o linie de câmp care pleacă de pe sarcina punctiformă, paralel cu planul, atinge planul. Se cunoaşte distanţa de la sarcina Q şi plan, h.

5. Să se calculeze forţa care acţionează asupra plăcilor unui condensator plan încărcat. Cum variază această forţă cu distanţa dintre plăci în cazul în care sarcinile de pe plăci rămâne constantă (sistem izolat) sau dacă diferenţa de potenţial dintre plăci rămâne constantă. Se cunoaşte capacitatea condensatorului,C şi diferenţa de potenţial U, respectiv sarcina de pe armăturile condensatorului, Q.

6. Între plăcile unui condensator plan cu plăcile conectate în scurtcircuit se află o sarcină electrică punctiformă. Să se determine sarcinile totale de influenţă de pe fiecare placă a condensatorului dacă se cunosc elementele geometrice ale problemei.

7. În interiorul unei cavităţi sferice se află o sarcină punctiformă, Q, la mijlocul razei cavităţii. Să se determine densitatea sarcinilor de influenţă pe suprafaţa cavităţii.

8. Un elipsoid având semiaxele a, b şi c este încărcat cu sarcina electrică Q. Determinaţi densitatea de sarcină de pe suprafaţa elipsoidului. Observaţie: Se foloseşte sistemul de coordonate confocale.

Răspunsuri

1. În cazul sferei conductoare izolate sarcina punctiformă Q are două imagini. Sarcina punctiformă care a fost calculată în cazul sferei conductoare legate la Pământ asigură potenţialul nul pe sferă. Dacă se mai adaugă o sarcină imagine în centrul sferei, se poate aduce potenţialul pe sferă la orice valoare constantă pe toată suprefaţa. Este evident că sarcina totală de influenţă este nulă, $Q_i = 0$, ceea ce indică faptul că sarcina imagine din centrul sferei este egală şi de semn contrar celeilalte sarcini imagine. Densitatea de sarcină pe suprafaţa conductorului este dată de:

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi\rho}\left\{\frac{\rho}{z_1} - \frac{z_1^2 - \rho^2}{(z_1^2 + \rho^2 - 2z_1\rho\cos\theta)^{3/2}}\right\}$$

2. Se poate folosi rezultatul de la problema precedentă. Pentru ca o sarcină punctiformă să poată crea un câmp aproximativ uniform trebuie să o punem la o distanţă foarte mare în raport cu diametrul sferei. Astfel, putem considera că variaţia câmpului pe această distanţă se poate neglija. Dar, odată cu creşterea distanţei, intensitatea câmpului creat de sarcina punctiformă scade. Din punct de vedere matematic, condiţiile pentru ca sarcina punctiformă să producă un câmp uniform E_0 sunt: $Q \to \infty$, $z_1 \to \infty$ şi $\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 z_1^2} \to E_0$. Deoarece poziţia sarcinii imagine care nu se află în centrul sferei este cu atât mai apropiată de centru cu cât sarcina Q este mai departe de sferă, rezultă că cele două sarcini imagine reprezintă un dipol care se apropie tot mai mult de condiţia de dipol punctiform cu cât Q se îndepărtează. Momentul de dipol al sarcinilor imagine este: $p_e = |q|\, z_2 = \left(Q\frac{\rho}{z_1}\right)\frac{\rho^2}{z_1} = 4\pi\varepsilon_0 E_0\rho^3$

Densitatea de sarcină este dată de: $\sigma = 3\varepsilon_0 E_0 \cos\theta$

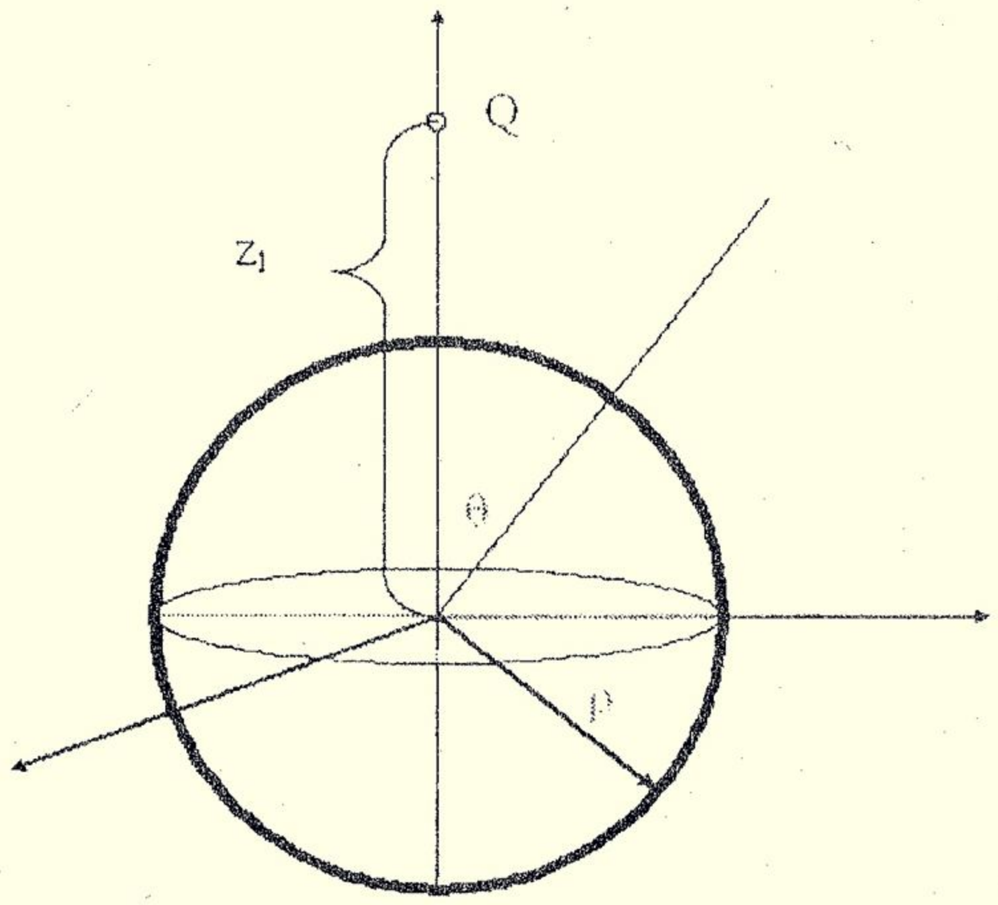
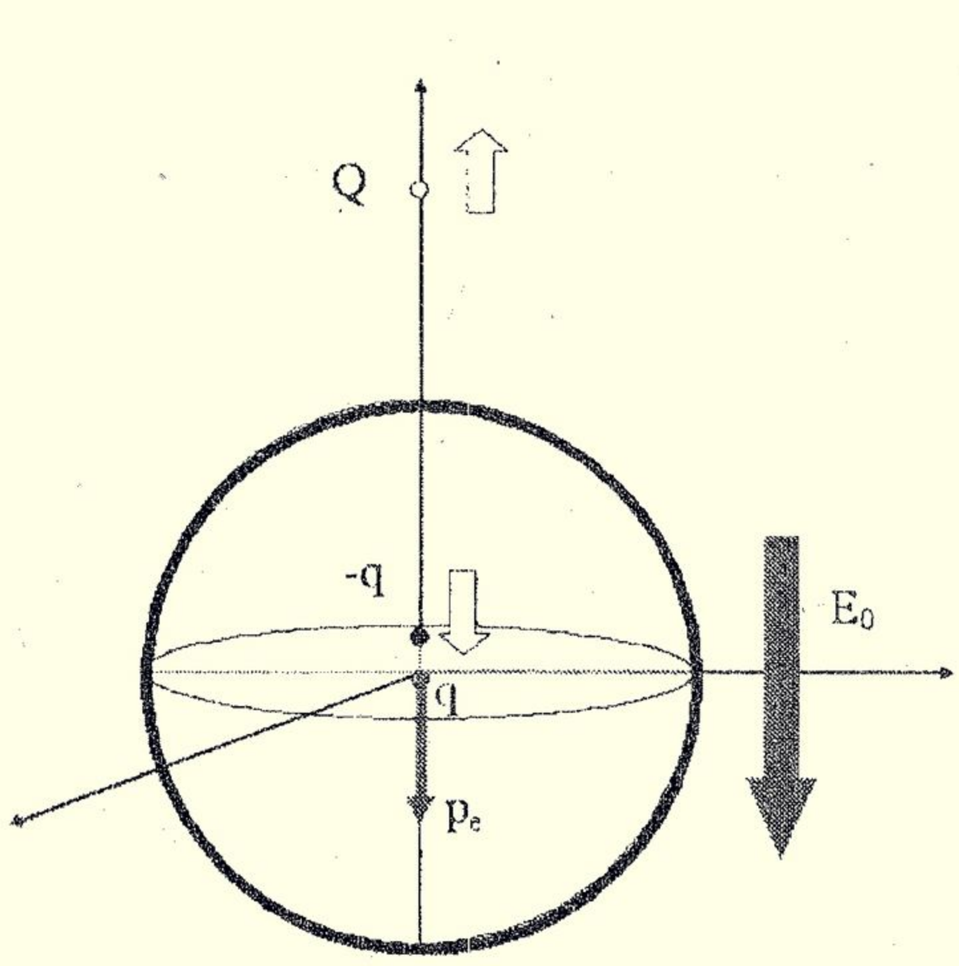
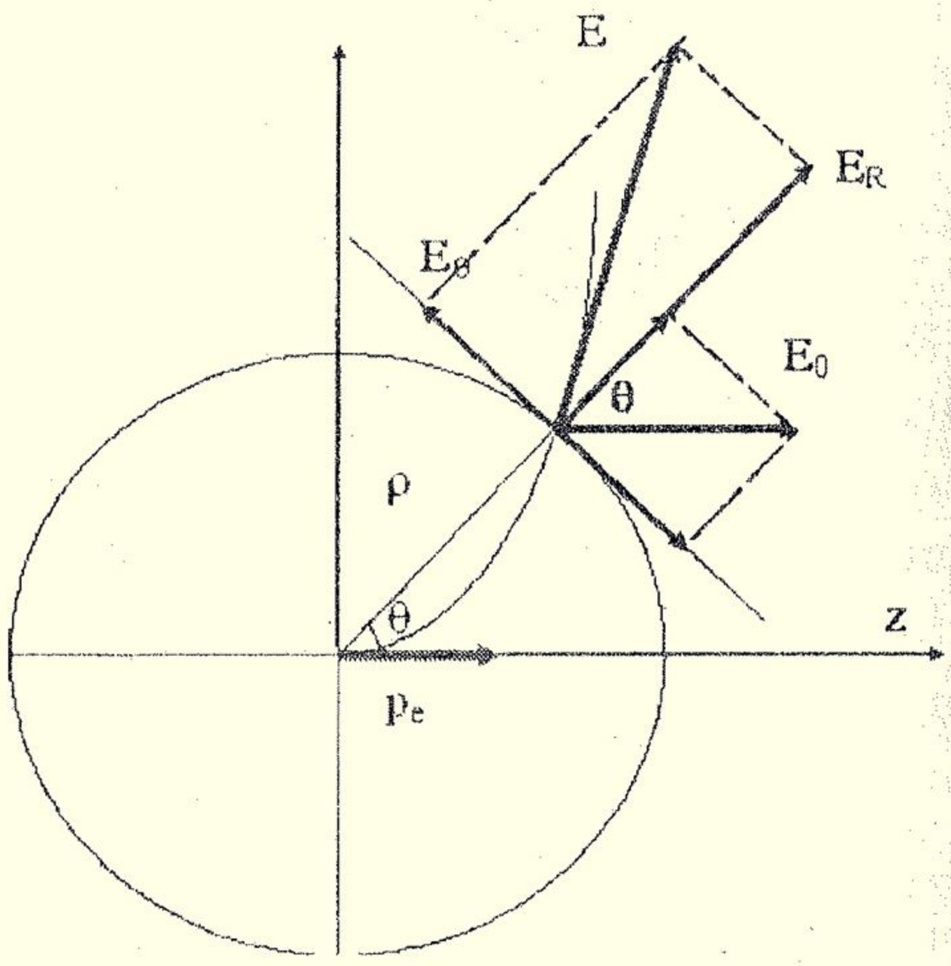


Figura 2.34: Problema 1. Metoda imaginilor. Sfera conductoare izolată



(a) Problema 2



(b) Câmpul total

Figura 2.35: Rezolvare problema 2

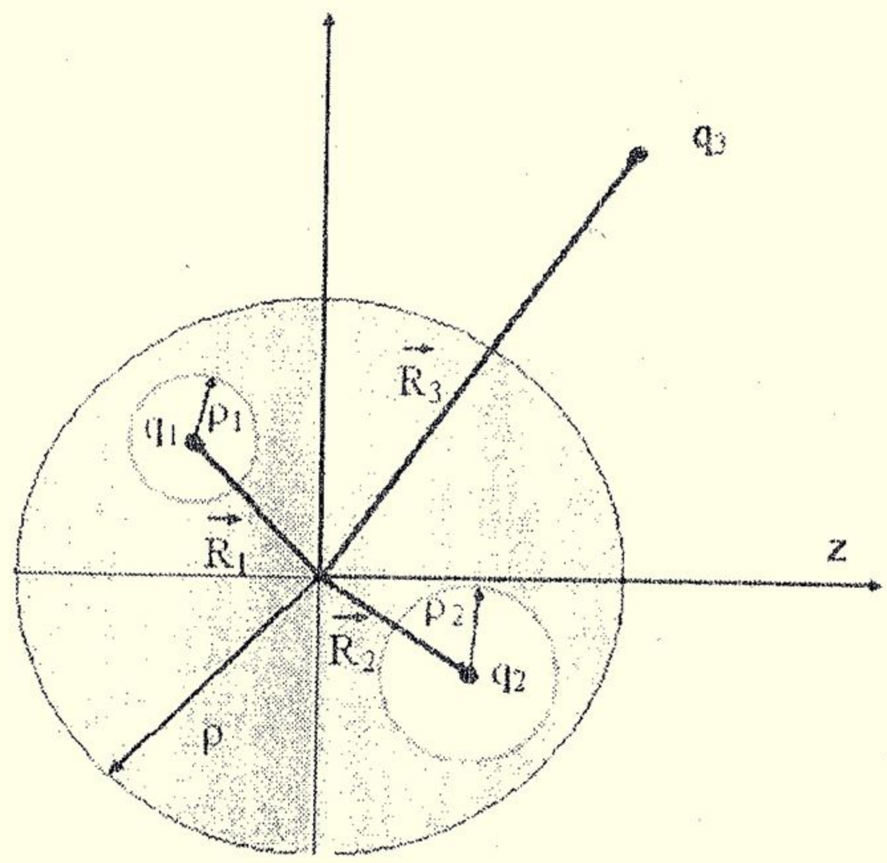


Figura 2.36: Problema 1. Metoda imaginilor. Sfera conductoare izolată

ată

3.

$$\vec{F}_1 = 0$$
$$\vec{F}_2 = 0$$
$$\vec{F}_3 = \left[-\frac{q_3 q'_3}{4\pi\varepsilon_0 (R_3 - R\prime_3)^2} + \frac{q_3 \left(q_1 + q_2 + q'_3\right)}{4\pi\varepsilon_0 R\prime_3^2} \right] \frac{\vec{R}_3}{R_3}$$
$$q\prime_3 = q_3 \frac{\rho}{R_3}; \quad R\prime_3 = \frac{\rho^2}{R_3}$$

E_R

4. Liniile de câmp care pleacă din sarcina Q pe direcţie orizontală ating conductorul pe un cerc de rază:

$$r = h\sqrt{2}$$

5. Cazul $Q = constant$:

$$F = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}$$

z

Cazul $U = constant$:

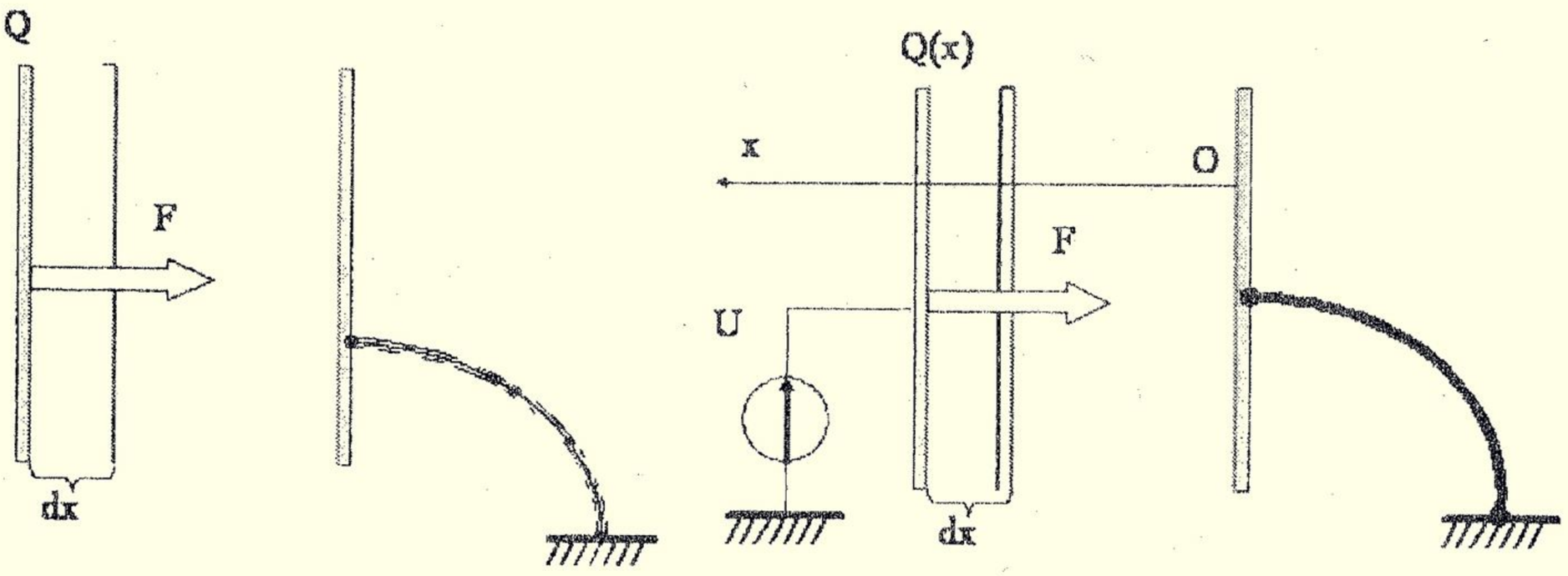
$$F = \frac{\varepsilon_0 S U^2}{2x^2}$$

6.

$$Q_1 = Q\frac{d-x}{d}$$
$$Q_2 = Q\frac{x}{d}$$

7.

$$\sigma(\theta) = \frac{Q}{4\pi\rho^2} \frac{6}{(5 - 4\cos\theta)^{3/2}}$$



(a) $Q = constant$ (b) $U = constant$

Figura 2.37: Problema 5

8.

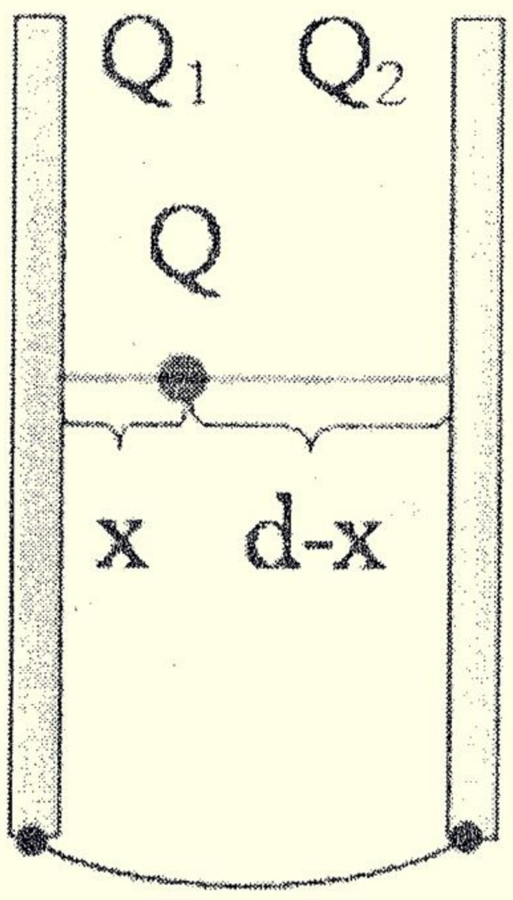


Figura 2.38: Problema 6

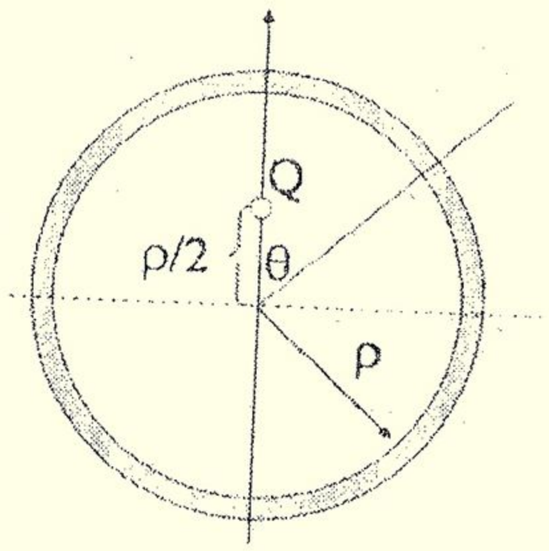


Figura 2.39: Problema 7

8.

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi abc} \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}$$

Cap

Die

3.1

For
ţiuni el
rială a
în prezc
care vo
electrice
conduct
1)
distanţa
legătură
încarcă
egală cu
Într
troscopu
constant
concomi
ţia α (F
nu poate
dintre s
formulat

tatic

Capitolul 3

Dielectrici în câmp electric

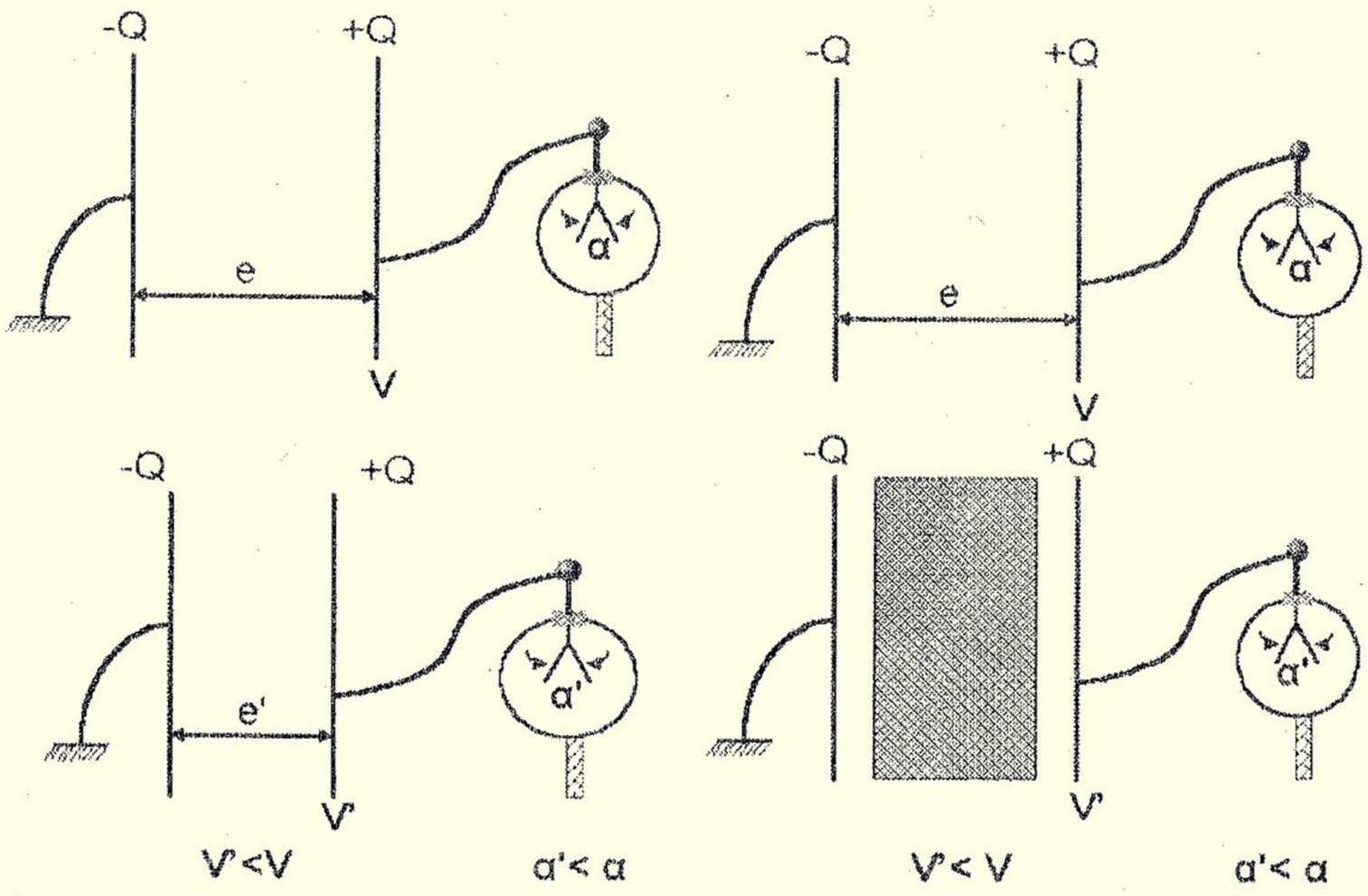
3.1 Experienţe fundamentale

Formulele stabilite în capitolele precedente sunt valabile pentru interacţiuni electrostatice care au loc în vid. Nu s-a ţinut seama de natura materială a mediului. În cele ce urmează vom examina fenomenele electrostatice în prezenţa substanţei. Mai întâi prezentăm câteva experienţe fundamentale care vor pune în relief modificarea forţelor de interacţiune dintre sarcinile electrice când între ele se interpune un mediu oarecare, exceptând mediile conductoare.

1) Considerăm un condensator plan ale cărui armături sunt situate la distanţa e. Una dintre armături este încărcată cu sarcina $+Q$ şi este în legătură directă cu un electroscop; cealaltă armătură, legată la Pământ, se încarcă prin influenţă cu sarcina $-Q$. Diferenţa de potenţial dintre ele este egală cu V (Fig. 3.1(a)).

Într-un experiment anterior s-a demonstrat că, deviaţia α a foiţelor electroscopului rămâne constantă dacă sarcina $+Q$ de pe armături se menţine constantă. S-a constatat însă că, dacă apropiem armăturile condensatorului, concomitent cu micşorarea distanţei dintre armături, se micşorează şi deviaţia α (Fig. 3.1(a)). Sarcina Q fiind constantă, această micşorare a deviaţiei nu poate să aibă loc decât numai dacă se micşorează potenţialul V. Relaţiile dintre sarcină şi potenţial, pentru distanţe diferite e şi e', $(e > e')$, pot fi formulate în felul următor:

$$Q = CV = (C\lambda)\left(\frac{V}{\lambda}\right) = C'V' \tag{3.1}$$



(a) Micşorarea potenţialului odată cu micşorarea distanţei dintre armăturile condensatorului

(b) Micşorarea potenţialului odată cu introducerea unui mediu dielectric între armături

Figura 3.1: Condensatorul cu dielectric

Rezultă astfel că micşorarea potenţialului de la V la $V' = V/\lambda$ antrenează o creştere a capacităţii condensatorului de la C la $C' = \lambda C$.

În experimentul de faţă menţinem *constante* atât *sarcina* $+Q$ cât şi *distanţa* e şi introducem între armăturile condensatorului o placă de parafină sau de sticlă, (Fig. 3.1(b)). Se va constata că, în prezenţa materialelor dielectrice interpuse între sarcinile $+Q$ şi $-Q$ de pe armături, electroscopul va indica o micşorare a deviaţiei, şi această micşorare depinde de natura dielectricului. Dacă se înlătură dielectricul dintre armături, deviaţia revine la valoarea iniţială. Deoarece sarcina $+Q$ şi distanţa e rămân constante, atât în prezenţa cât şi în absenţa dielectricului, este de presupus că micşorarea deviaţiei α este *datorată micşorării potenţialului şi această diminuare a potenţialului este cauzată numai de prezenţa mediului dielectric între sarcinile de pe armături*. Acest experiment suscită o serie de întrebări: De ce trebuie să se micşoreze potenţialul dacă sarcina Q este constantă? Potrivit teoremei circulaţiei câmpului electric, $V = -\int \vec{E}_0 \cdot \overrightarrow{dl}$, o micşorare a potenţialului V, poate să aibă loc numai dacă se micşorează câmpul $\vec{E}_0$ datorat sarcinii Q libere de pe armăturile condensatorului. Dar pe de altă parte, teorema lui Gauss, $\int \vec{E}_0 \cdot \overrightarrow{dS} = Q/\varepsilon_0$, arată că o micşorare a câmpului $\vec{E}_0$ poate să

aibă loc numai dacă se micşorează sarcina Q închisă în suprafaţa S! Dar experimentul atestă că sarcina Q de pe armăturile condensatorului se conservă atât în prezenţa cât şi în absenţa dielectricului. Aceasta înseamnă că prezenţa dielectricului face să se micşoreze sarcina totală închisă în suprafaţa Gauss considerată.

Este interesant de observat că un efect asemănător se poate constata experimental, dacă, în loc să introducem un dielectric între armăturile condensatorului, introducem un conductor de aceleaşi dimensiuni ca şi ale dielectricului: deviaţia foiţelor electroscopului se micşorează şi de data aceasta. Acest fapt este explicabil deoarece introducerea unui conductor de grosime $d < e$ între armăturile condensatorului este echivalentă cu o reducere a distanţei dintre armături, de la valoarea iniţială e la valoarea $e - d$, fapt care implică o creştere a capacităţii condensatorului de la valoarea $C = \frac{\varepsilon_0 S}{e}$ la valoarea $C' = \frac{\varepsilon_0 S}{e-d}$. Sarcina Q fiind constantă, se poate scrie că

$$Q = CV = C'V' \tag{3.2}$$

Este evident că $V' < V$ deoarece $C' > C$. Deci, indiferent dacă introducem un dielectric sau un conductor între armăturile condensatorului, efectul este asemănător: potenţialul se micşorează. Având în vedere deosebirile nete dintre dielectrici şi conductori este absolut necesar să admitem că diminuarea potenţialului are cauze diferite în cele două categorii de materiale. În cele ce urmează vom vedea că mecanismul micşorării potenţialului în prezenţa dielectricului este complet diferit de cel care are loc în prezenţa conductorului.

3.2 Fenomenul de polarizare a dielectricilor.

Să examinăm mai îndeaproape comportarea unui dielectric în câmpul electric pentru a găsi o explicaţie plauzibilă micşorării potenţialului şi, implicit, a câmpului electric dintre armăturile condensatorului în prezenţa dielectricului. Să presupunem că dielectricul este alcătuit din *molecule nepolare*. Aceasta înseamnă că, în absenţa unui câmp electric exterior, în fiecare moleculă centrul de simetrie al sarcinilor pozitive se confundă cu centrul de simetrie al sarcinilor negative şi astfel, în fiecare dintre aceste molecule, nu se poate distinge net un pol pozitiv de un pol negativ. Molecula este *nepolară*. De exemplu, moleculele diatomice constituite din atomi identici, (H_2, O_2 ...), sau moleculele triatomice ale căror structură este simetrică, (CO_2,...)

sunt molecule nepolare. Dar dacă o moleculă nepolară este situată într-un câmp electric $\vec{E}_0$, sarcinile pozitive vor fi solicitate să se deplaseze în sensul câmpului iar sarcinile negative în sens opus, şi astfel centrele de simetrie ale celor două sarcini, $+q$ şi $-q$ din fiecare moleculă se vor afla la o distanţă $\vec{d}$ formând dipoli având momentul electric $\vec{p} = q\vec{d}$ dirijat în sensul câmpului electric exterior $\vec{E}_0$ (Fig. 3.2(a)). În acest fel, pe suprafaţa dielectricului aflată în apropierea armăturii care poartă sarcina $+Q$, se va induce o sarcină negativă $-Q_p$ iar pe suprafaţa opusă, aflată în apropierea armăturii încărcate negativ $-Q$, se va induce o sarcină pozitivă $+Q_p$, (Fig. 3.2(b)). Aceste sarcini, $\pm Q_p$ sunt legate de moleculele lor şi nu se combină cu sarcinile libere $+Q$ şi $-Q$ de pe armăturile condensatorului. *Dielectricul s-a polarizat în prezenţa câmpului electric exterior* $\vec{E}_0$. Să presupunem acum că decupăm o suprafaţă Gauss elementară din sistemul format de o armătură a condensatorului şi dielectric, astfel încât aceasta să conţină în interiorul ei sarcini libere $+dQ$ de pe armătura pozitivă, şi sarcini de polarizare $-dQ_p$ de pe suprafaţa dielectricului aflată în vecinătatea armăturii pozitive. În acord cu teorema lui Gauss, fluxul câmpului electric prin această suprafaţă elementară închisă este

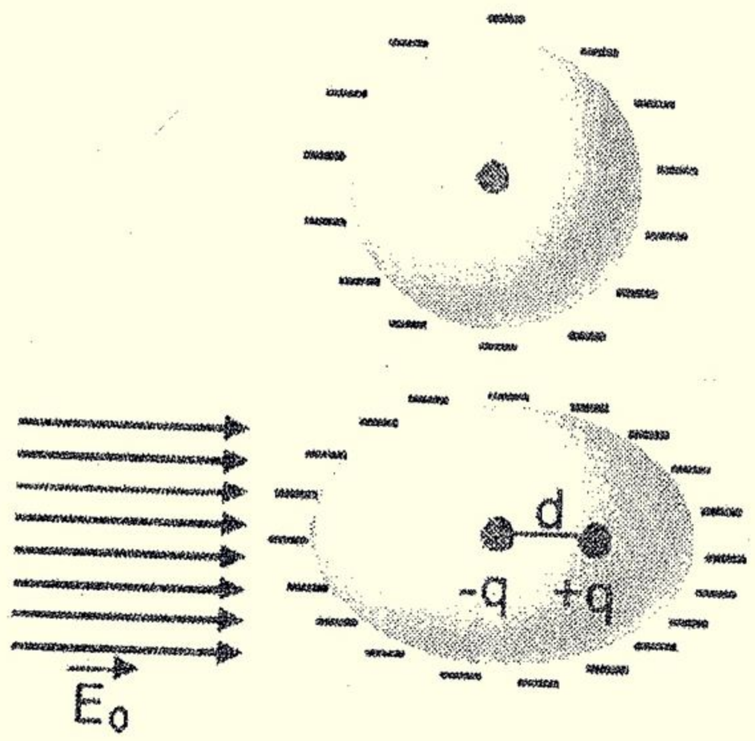
$$\vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{dQ - dQ_p}{\varepsilon_0}, \tag{3.3}$$

de unde rezultă că

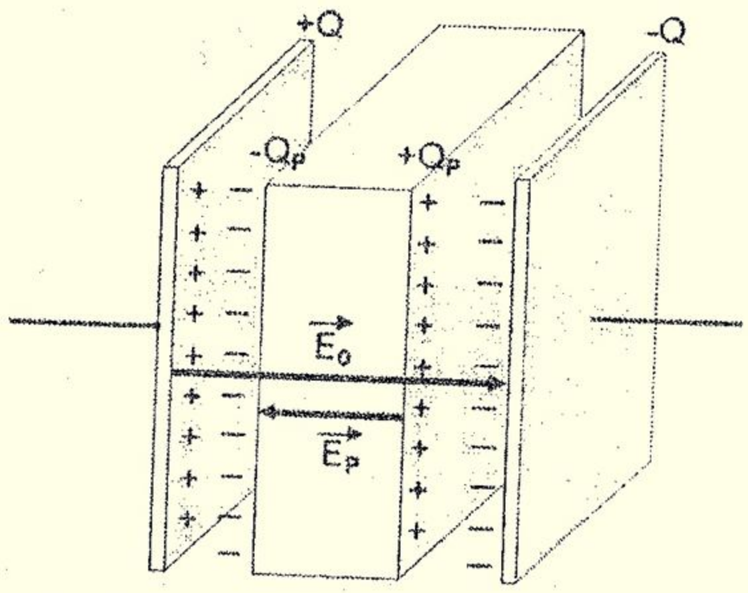
$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n} - \frac{\sigma_p}{\varepsilon_0}\vec{n} = \vec{E}_0 + \vec{E}_p \tag{3.4}$$

în care $E_0 = \sigma/\varepsilon_0$ reprezintă câmpul electric al sarcinilor libere Q de pe armături, iar $E_p = -\sigma_p/\varepsilon_0$ reprezintă câmpul electric al sarcinilor de polarizare repartizate pe suprafeţele dielectricului. Acest câmp $\vec{E}_p$ este paralel cu $\vec{E}$ şi de sens opus acestuia. Este evident deci că apariţia sarcinilor superficiale σ_p pe suprafaţa dielectricului contribuie la micşorarea sarcinii totale din interiorul suprafeţei Gauss considerate, $(dQ - dQ_p)$, fapt care explică micşorarea câmpului şi respectiv a potenţialului electric aşa cum s-a dedus din experimentul prezentat mai sus.

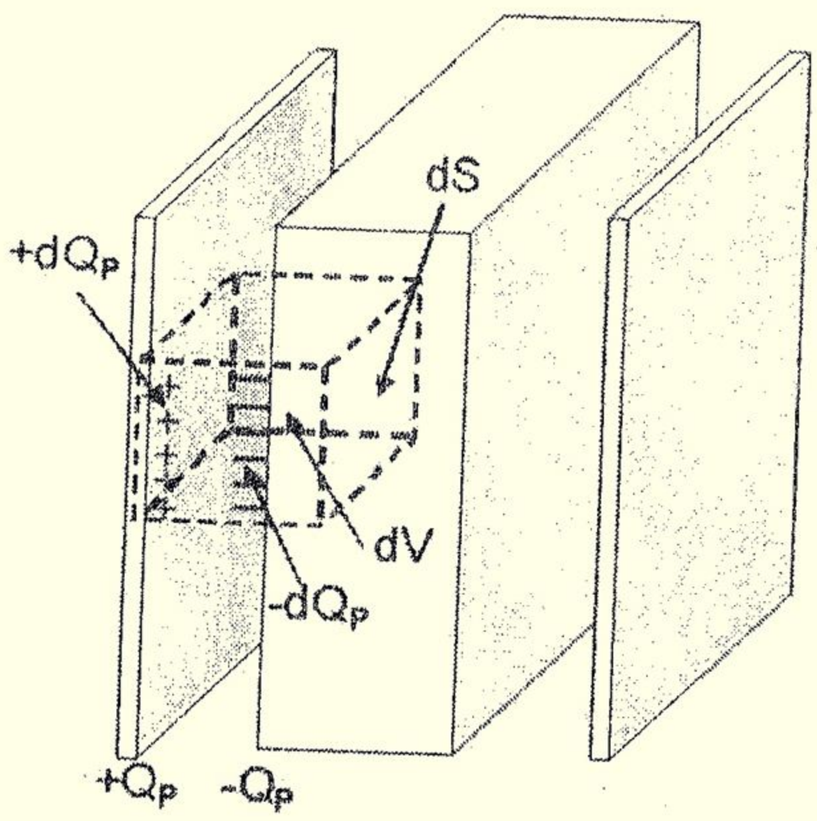
Mecanismul de polarizare propus pentru moleculele nepolare are loc şi la nivelul atomului. În prezenţa câmpului exterior centrul de simetrie al învelişului electronic al atomului se deplasează în raport cu nucleul pozitiv, constituind astfel un dipol indus la nivelul atomic, $\vec{p}_e = e\vec{d}$. Se poate considera cazul unui atom constituit dintr-un nucleu cu sarcina $+Ze$ în jurul căruia orbitează electroni periferici a căror sarcină totală este $-Ze$. Dacă moleculele aparţin unui cristal ionic constituit din ioni pozitivi şi negativi,



(a) Polarizarea unei molecule nepolare în câmp electric uniform

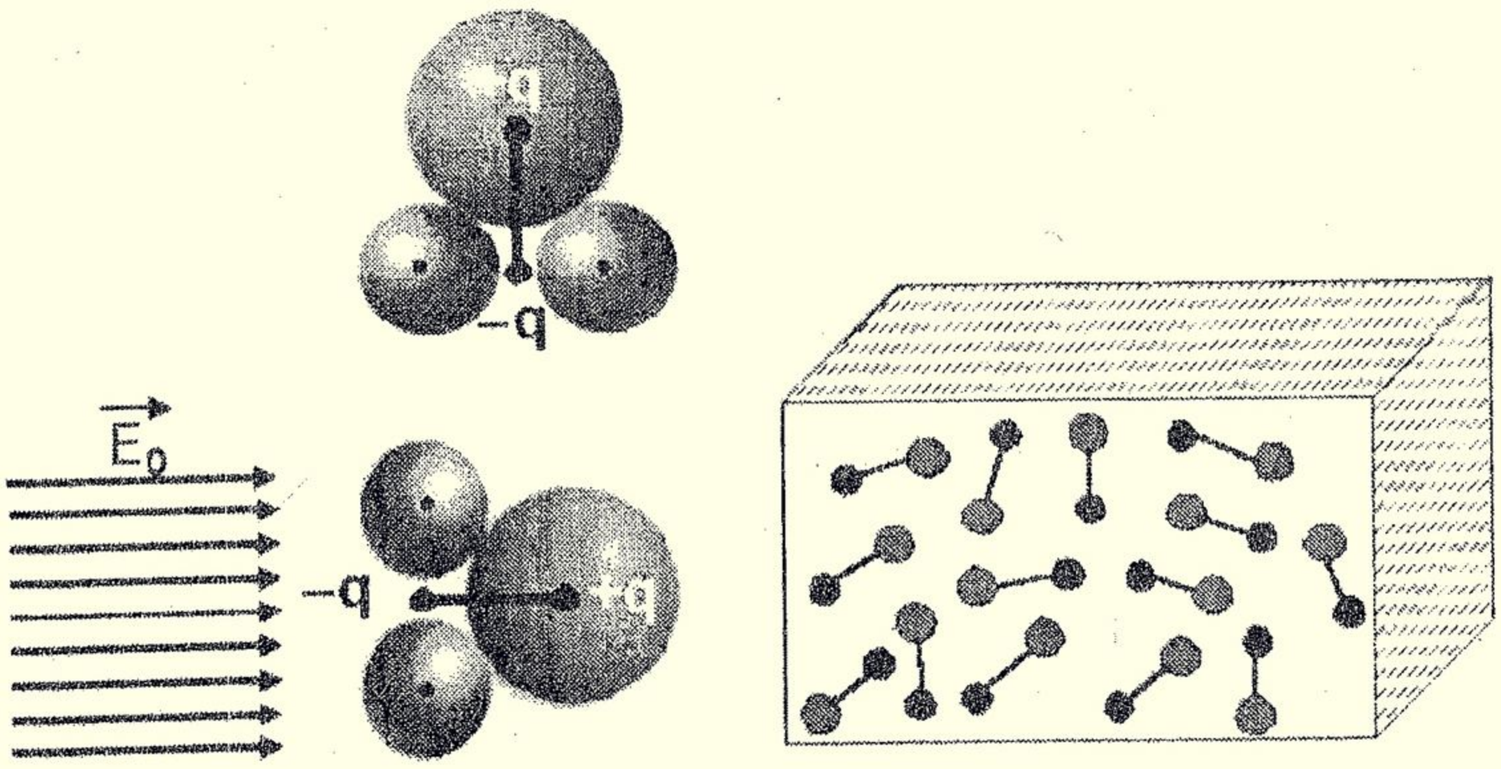


(b) Polarizarea dielectricului



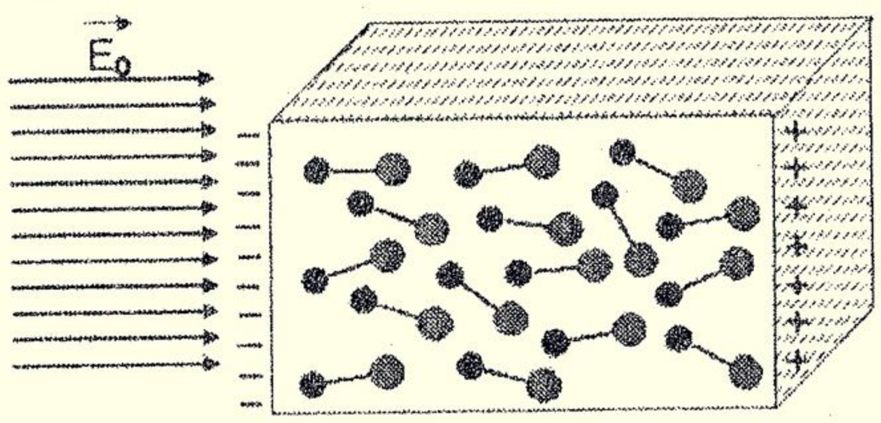
(c) Schemă pentru aplicarea teoremei lui Gauss

Figura 3.2: Condensatorul cu dielectric



(a) Orientarea momentului dipolar propriu al unei molecule polare în absenţa câmpului exterior

(b) Dielectric cu molecule polare în ccâmpul electric



(c) Polarizarea dielectricului cu moleculelor polare în prezenţa câmpului electric

Figura 3.3: Polarizarea dielectricului

aceştia se deplasează în câmpul electric exterior formând dipoli. Distingem deci fenomene de polarizare electronică şi de polarizare ionică.

Există însă molecule ale căror structură este asimetrică, în care centrele sarcinilor pozitive şi negative nu coincid, (HCl, SO_4, H_2O). Aceste *molecule polare* posedă un moment dipolar permanent, $\vec{p}_0$ (Fig. 3.3(b)). În absenţa câmpului electric exterior, agitaţia termică este suficient de mare pentru a împrăştia la întâmplare momentele individuale ale acestor molecule, astfel încât momentul electric rezultant este nul. În prezenţa unui câmp electric exterior $\vec{E}_0$ are loc un proces de orientare a dipolilor (Fig. 3.3(c)). Astfel încât momentul electric rezultant, reprezentat prin suma proiecţiilor momentelor individuale pe direcţia câmpului, va depinde de raportul energiilor electrice şi termice puse în joc în acest proces. Distingem astfel un mecanism de *polarizare dipolară* sau de polarizare orientaţională, diferit de cel de polarizare

ionică sau de polarizare electronică.

3.3 Vectorul polarizaţie şi densitatea sarcinilor de polarizare. Cazul polarizării uniforme

Pentru a caracteriza gradul de polarizare a unui dielectric în orice punct introducem o mărime vectorială numită *polarizaţie volumică*, sau simplu *polarizaţie*, $\vec{P}$. Pentru aceasta, considerăm în jurul unui punct M din dielectricul polarizat, un volum Δv, foarte mic la scara observatorului, dar care conţine totuşi un număr foarte mare de molecule care sunt polarizate în direcţia câmpului printr-unul dintre mecanismele propuse mai înainte. Momentul electric rezultant este $\Delta\vec{p}$. La limită, făcând ca Δv să tindă către zero, raportul $\Delta\vec{p}/\Delta v$ va reprezenta polarizaţia dielectricului în punctul M,

$$\vec{P} = \lim_{\Delta v \to 0} \left(\frac{\Delta \vec{p}}{\Delta v} \right) \tag{3.5}$$

sau

$$\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dv}. \tag{3.6}$$

În general, *polarizaţia P se defineşte ca fiind o mărime numeric egală cu limita către care tinde raportul $\Delta p/\Delta v$ când $\Delta v \to 0$*. Dacă dielectricul este uniform polarizat, polarizaţia acestuia poate fi definită ca fiind o mărime numeric egală cu momentul electric al unităţii de volum. Din formula (3.6) se deduce imediat că dimensiunea polarizaţiei este aceea a unei densităţi superficiale de sarcină. Într-adevăr,

$$[P] = \left[\frac{Qd}{v} \right] = \left[\frac{Q}{L^2} \right] \tag{3.7}$$

Unitatea de măsură a polarizaţiei se numeşte coulomb pe metru pătrat ($\mathrm{C/m^2}$). Să stabilim acum ce legătură există între polarizaţia $\vec{P}$ şi densitatea superficială σ_p a sarcinilor de polarizare. Presupunem că în dielectric există n molecule nepolare în unitatea de volum şi că, în prezenţa unui câmp electric exterior $\vec{E}_0$, dielectricul se polarizează uniform în direcţia câmpului, fiecare moleculă căpătând un moment electric $\vec{p} = q\vec{d}$. Momentul electric al unităţii de volum, respectiv polarizaţia $\vec{P}$ a dielectricului, este

$$\vec{P} = n\vec{p} = nq\vec{d}. \tag{3.8}$$

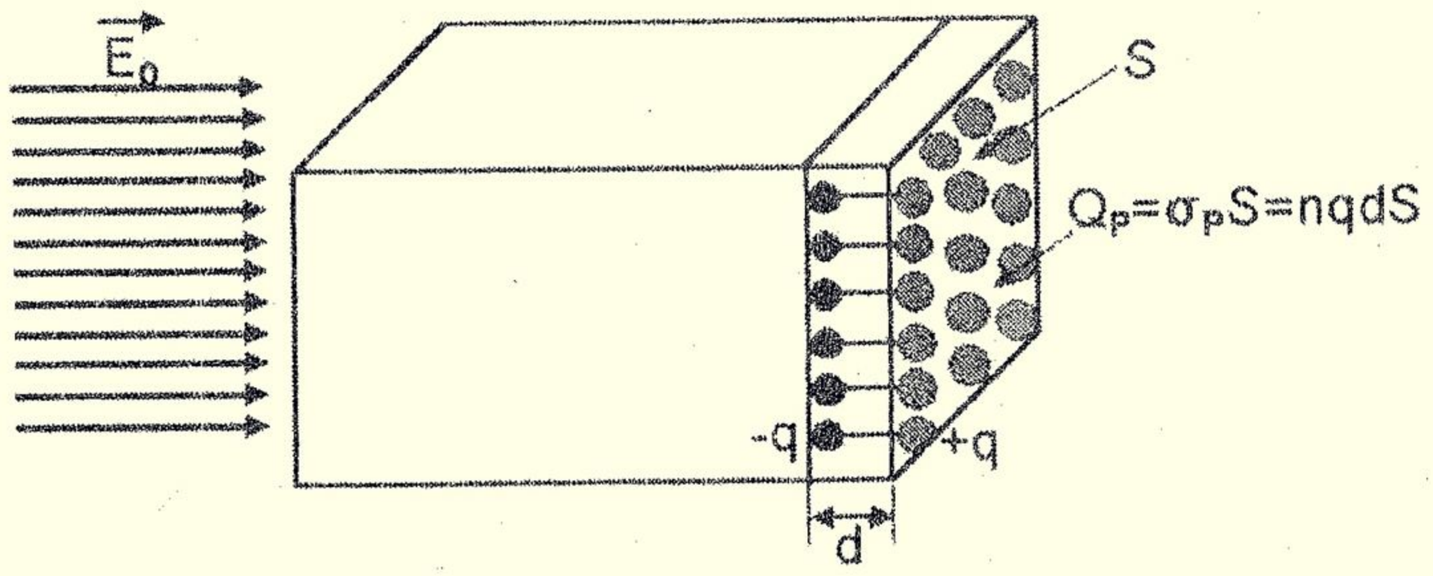


Figura 3.4: Schemă pentru evaluarea densităţii superficiale σ_p a sarcinii de polarizare

Sarcina totală de polarizare, Q_p, indusă de câmpul $\vec{E}_0$ pe suprafaţa S a dielectricului provine de la N molecule polarizate care, aflându-se pe stratul superficial al dielectricului, (Fig. 3.4), contribuie fiecare cu sarcina q. Astfel sarcina totală de pe suprafaţa dielectricului este $Q_p = Nq$. Aceste molecule ocupă volumul $v = Sd$, astfel că $N = nv = nSd$ şi deci $Q_p = nqdS$. Densitatea superficială a sarcinilor de polarizare fiind prin definiţie $\sigma_p = \frac{Q_p}{S}$, rezultă că

$$\sigma_p = nqd \tag{3.9}$$

Din ultimele relaţii se deduce că densitatea superficială a sarcinilor de polarizare σ_p este egală cu modulul polarizaţiei $\vec{P}$ normale la suprafaţa dielectricului,

$$\sigma_p = (\vec{P} \cdot \vec{n}) = P_n \tag{3.10}$$

în care $\vec{n}$ este vectorul unitar al suprafeţei.

În cazul considerat, suprafaţa plană a dielectricului, fiind paralelă cu suprafaţa armăturilor condensatorului plan, vectorii $\vec{P}$ şi $\vec{n}$ sunt coliniari şi ecuaţia (3.4) poate fi scrisă sub forma următoare:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n} - \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}. \tag{3.11}$$

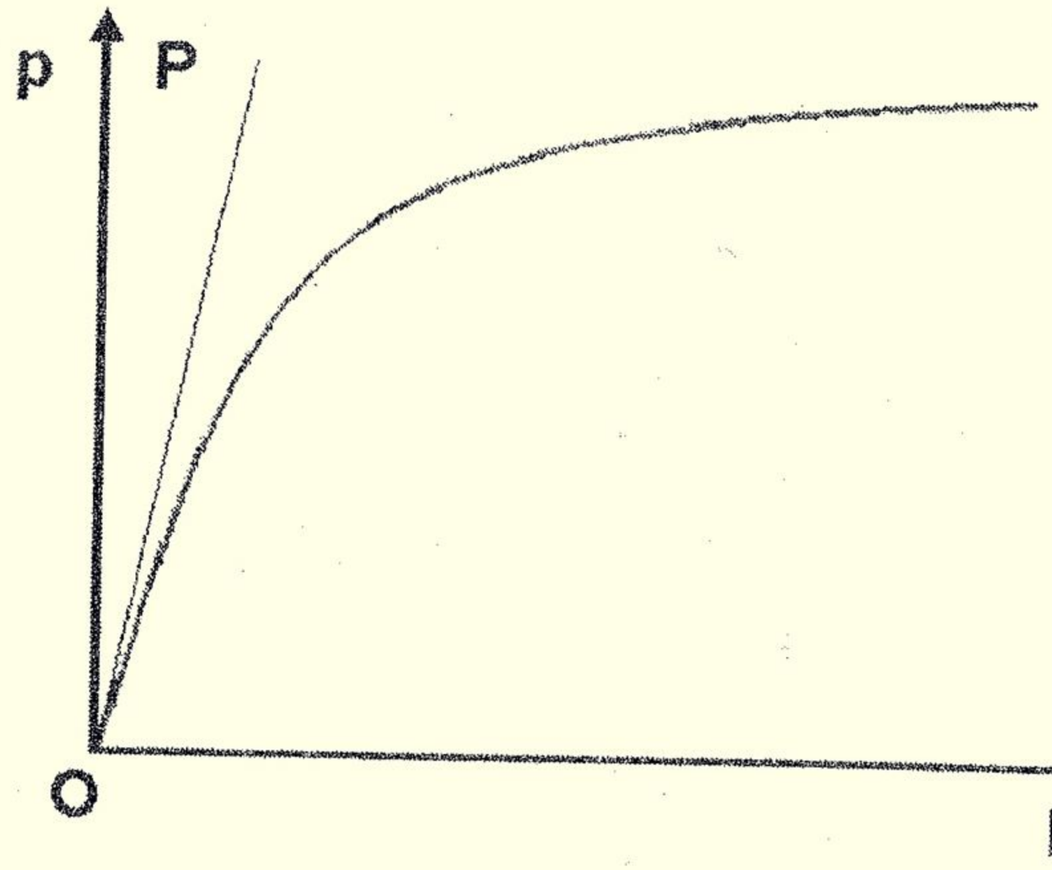


Figura 3.5: Dependenţa momentului electric molecular, respectiv a polarizaţiei, de intensitatea câmpului electric exterior

3.4 Susceptibilitate şi permitivitate electrică. Vectorul inducţie electrică $\vec{D}$. Relaţia dintre vectorii $\vec{E}$, $\vec{D}$ şi $\vec{P}$

Fiecare moleculă, aflându-se în câmpul electric rezultant $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_p$, capătă un moment electric $\vec{p} = q\vec{d}$ a cărui mărime depinde de intensitatea acestui câmp. Efectiv, cu creşterea câmpului trebuie să crească distanţa dintre centrele de simetrie ale sarcinilor $\pm q$ în fiecare moleculă, respectiv să crească momentul electric al dipolului. Experimental se constată că, în domeniul câmpurilor mari, momentul electric nu creşte proporţional cu câmpul; peste o anumită limită creşterea intensităţii câmpului electric nu mai este capabilă să mărească momentul electric al dipolului (Fig. 3.5). Nu se cunoaşte nici un experiment în care un câmp electric intens să poată să provoace într-un atom separarea sarcinilor pozitive şi negative. Se constată însă că, *în domeniul câmpurilor slabe, momentul electric indus creşte proporţional cu câmpul.* Ca urmare, momentul electric al unităţii de volum, respectiv *polarizaţia, se supune unei legi de proporţionalitate cu câmpul electric în domeniul câmpurilor nu prea intense:*

$$\vec{P} = \chi \vec{E} \tag{3.12}$$

Factorul de proporţionalitate χ

$$\chi = \frac{dP}{dE} \tag{3.13}$$

este o mărime numeric egală cu polarizaţia pe care o capătă un dielectric,ând acesta este supus unui câmp electric egal cu unitatea, sau când câmpul electric variază cu o unitate . O serie de substanţe dielectrice, mai susceptibile la acţiunea câmpului electric, capătă polarizaţii mari, altele mai puţin susceptibile se polarizează mai slab în acelaşi câmp exterior. Capacitatea dielectricilor de a se polariza mai puternic sau mai slab este convenabil caracterizată de mărimea acestui factor χ care se numeşte **susceptivitate electrică**.

Introducând, în ecuaţia (3.11) expresia polarizaţiei din (3.12), obţinem o relaţie directă între câmpul electric $\vec{E}$ din dielectric şi sarcina liberă σ care creează câmpul electric exterior $\vec{E}_0$,

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} - \frac{\chi E}{\varepsilon_0} \tag{3.14}$$

În această ecuaţie (3.14) figurează, în membrul al doilea, două constante, χ şi ε_0. Este convenabil să notăm raportul χ/ε_0 cu o singură constantă:

$$k = \frac{\chi}{\varepsilon_0}. \tag{3.15}$$

Semnificaţia fizică a acestei constante k este aceea a unei susceptibilităţi reduse, sau raportate, la valoarea permitivităţii vidului. Cu această notaţie, ecuaţia (3.14) se scrie:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 (1+k)} = \frac{Q}{\varepsilon_0 (1+k) S} \tag{3.16}$$

Exprimând circulaţia vectorului $\vec{E}$ prin dielectricul de grosime e situat între armăturile condensatorului de suprafaţă S, stabilim o relaţie intre diferenţa de potenţial dintre armături şi sarcina liberă Q de pe armături,

$$V = \int_0^e \vec{E} \cdot \vec{dl} = \frac{Q}{\varepsilon_0 (1+k) S} \int_0^e dl. \tag{3.17}$$

De aici se deduce imediat capacitatea condensatorului cu dielectric între armături

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon_0 (1+k) S}{e} \tag{3.18}$$

Factorul care multiplică suprafaţa S în această ecuaţie reprezintă *permitivitatea absolută* ε *a mediului dielectric*:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + k) \tag{3.19}$$

Permitivitatea absolută raportată la permitivitatea vidului, $\varepsilon/\varepsilon_0$, reprezintă *permitivitatea relativă* ε_r a mediului:

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = 1 + k \tag{3.20}$$

Se poate determina această permitivitate relativă dacă se compară expresiile capacităţii condensatorului cu dielectric

$$C = \frac{\varepsilon S}{e} \tag{3.21}$$

şi fără dielectric (cu vid între armături)

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{e} \tag{3.22}$$

Raportul lor dă,

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{C}{C_0} \tag{3.23}$$

Astfel, *permitivitatea relativă reprezintă raportul dintre capacitatea unui condensator cu dielectric între armături şi capacitatea aceluiaşi condensator cu vid între armături.* Formula (3.19) oferă posibilitatea de a exprima susceptivitatea electrică în funcţie de permitivitate, ţinând seama de (3.15):

$$\chi = k\varepsilon_0 = \varepsilon - \varepsilon_0. \tag{3.24}$$

Se observă imediat că dimensiunile fizice ale susceptivităţii χ sunt cele ale permitivităţii, iar unitatea de măsură este farad/metru. Totodată, *susceptivitatea redusă* k *este o mărime adimensională.* În virtutea ecuaţiei (3.24) expresia polarizaţiei (3.12) mai poate fi scrisă sub forma:

$$\vec{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\, \vec{E} \tag{3.25}$$

Introducem în ecuaţia (3.24) notaţia:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \tag{3.26}$$

în care vectorul $\vec{D}$, numit **deplasare electrică** sau **inducţie electrică**, reprezintă o *mărime numeric egală cu permitivitatea absolută a mediului dielectric când acesta este supus unui câmp electric egal cu unitatea.*

Cu această notaţie, ecuaţia (3.25) poate fi scrisă sub forma următoare:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \tag{3.27}$$

Această ecuaţie (3.27), care exprimă *relaţia dintre vectorii câmp electric* $\vec{E}$, *inducţie electrică* $\vec{D}$ *şi polarizaţia* $\vec{P}$ *în mediile polarizate*, constituie o ecuaţie fundamentală pentru mediile dielectrice.

Remarcă. In condiţiile interacţiunilor electrostatice în medii dielectrice de permitivitate ε, legea lui Coulomb, formulată în capitolul 1 pentru interacţiuni în vid, capătă forma următoare:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Qq}{R^2}\frac{\vec{R}}{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0(1+k)}\frac{Qq}{R^2}\frac{\vec{R}}{R} \tag{3.28}$$

Se observă imediat că această lege este valabilă pentru interacţiuni slabe deoarece, susceptibilitatea redusă k , respectiv susceptivitatea χ, a fost definită în (3.12) ca o constantă a mediului dielectric cu condiţia ca interacţiunile electrostatice să aibă loc în *domeniul câmpurilor slabe unde polarizaţia este practic proporţională cu câmpul electric.*

3.5 Potenţialul şi câmpul electrostatic al unui dielectric polarizat neuniform

În cele ce urmează vom arăta că relaţia dintre vectorii $\vec{E}$, $\vec{D}$ şi $\vec{P}$, stabilită în cazul mediilor dielectrice polarizate uniform, este valabilă şi pentru medii dielectrice polarizate neuniform. Considerăm un dielectric al cărui volum v este polarizat neuniform. Descompunem acest volum în elemente dv suficient de mici pentru ca polarizaţia $\vec{P}$ să fie uniformă în fiecare din aceste volume elementare. În fiecare element de volum dv momentul electric este $d\vec{p} = \vec{P}dv$. Pentru a calcula câmpul electric creat de totalitatea dipolilor elementari $d\vec{p}$ într-un punct dat, este convenabil să evaluăm mai întâi potenţialul electric al acestor dipoli şi apoi să utilizăm relaţia cunoscută dintre câmp şi potenţial, $\vec{E} = -gradV$.

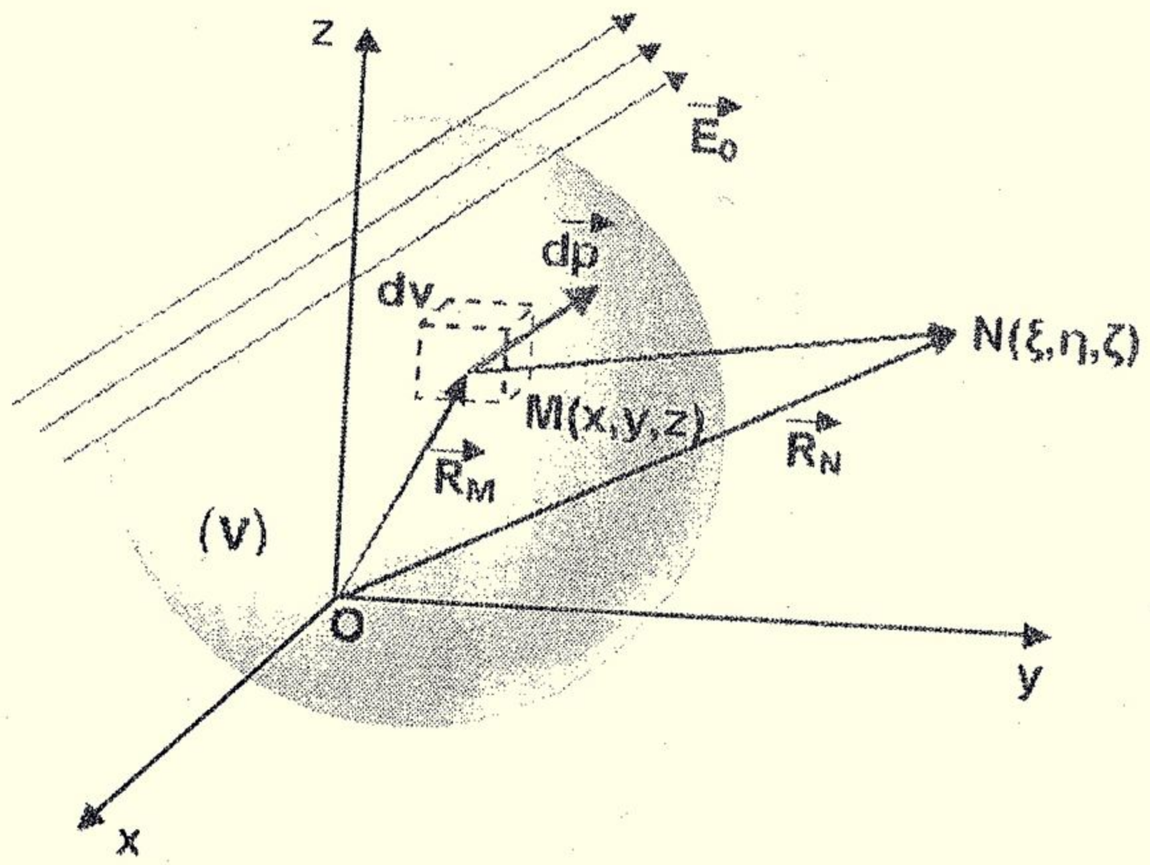


Figura 3.6: Schemă pentru calculul potenţialul unui dielectric polarizat neuniform

3.5.1 Potenţialul electrostatic al unui dielectric polarizat neuniform

Considerăm un volum elementar dv centrat în jurul unui punct $M(x, y, z)$ din dielectric (Fig. 3.6) şi să determinăm potenţialul dV_p creat de dipolul elementar $d\vec{p}$ asociat volumului dv, într-un punct $N(\xi, \eta, \zeta)$ situat la distanţa $\vec{R}$ de punctul M: Conform relaţiei generale pentru potenţialul unui dipol electric, expresia potenţialului dipolului elementar $d\vec{p}$ este

$$dV_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d\vec{p}\cdot\vec{R}}{R^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{P}\cdot\vec{R}}{R^3}dv \tag{3.29}$$

Dat fiind că

$$\vec{R} = \vec{R}_N - \vec{R}_M = \vec{i}(\xi - x) + \vec{j}(\eta - y) + \vec{k}(\zeta - z)$$

expresia (3.29) poate fi transformată convenabil pentru a fi integrată în raport cu coordonatele punctului $M(x, y, z)$ în jurul căruia este centrat elementul de volum dv. Astfel ţinând seama de faptul că,

$$\frac{\vec{R}}{R^3} = -grad_N\left(\frac{1}{R}\right) = grad_M\left(\frac{1}{R}\right)$$

expresia (3.29) capătă forma următoare:

$$V_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_v \vec{P}\cdot grad_M\left(\frac{1}{R}\right)dv \tag{3.30}$$

Această integrală poate fi calculată relativ simplu dacă utilizăm următoarea relaţie cunoscută în analiza vectorială:

$$div\left(\frac{\vec{P}}{R}\right) = \vec{P}\cdot grad\left(\frac{1}{R}\right) + \frac{div\vec{P}}{R}$$

După înlocuire, formula (3.30) capătă forma:

$$V_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_v \frac{\left(-div\vec{P}\right)}{R}dv + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_v div\left(\frac{\vec{P}}{R}\right)dv \tag{3.31}$$

A doua integrală de volum poate fi transformată într-o integrală pe suprafaţa S care limitează întregul volum v al dielectricului considerat.

$$\int_v div\left(\frac{\vec{P}}{R}\right)dv = \int_S \frac{\left(\vec{P}\cdot\vec{n}\right)dS}{R}$$

În această expresie $\vec{n}$ este vectorul unitar normal la suprafaţa S iar produsul scalar $\left(\vec{P}\cdot\vec{n}\right) = P_n$ reprezintă proiecţia polarizaţiei pe direcţia normalei la suprafaţa dielectricului şi, aşa cum s-a constatat mai înainte, (formula (3.10)), această mărime reprezintă densitatea superficială a sarcinilor de polarizare σ_p de pe suprafaţa dielectricului,

$$\left(\vec{P}\cdot\vec{n}\right) = \sigma_p \tag{3.32}$$

În ecuaţia (3.31) mărimea $-div\vec{P}$ este omogenă cu o densitate volumică de sarcină pe care o notăm cu ρ_p

$$-div\vec{P} = \rho_p \tag{3.33}$$

Această sarcină volumică ρ_p este o sarcină fictivă care trebuie să fie luată în consideraţie numai dacă dielectricul este polarizat neuniform. În cazul

dielectricilor polarizaţi uniform, această sarcină volumică nu există, $\rho_p = 0$, deoarece polarizaţia $\vec{P}$ este constantă în orice punct al volumului dielectricului şi, în acest caz $div\vec{P} = 0$. Cu aceste notaţii, (3.32) şi (3.33), expresia (3.31) pentru potenţialul dielectricului polarizat capătă o formă clasică pentru distribuţii de sarcină volumice şi superficiale:

$$V_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_v \frac{\rho_p}{R}dv + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\sigma_p}{R}dS \tag{3.34}$$

În cazul cel mai general, în care dielectricul polarizat este situat într-un câmp exterior produs de sarcini electrice superficiale reale de densitate σ, (de exemplu sarcinile de pe armăturile unui condensator), sau într-un câmp creat de sarcini volumice reale de densitate ρ, expresia potenţialului capătă o formă mai generală în care, în virtutea proprietăţii de aditivitate a potenţialelor, la potenţialul dielectricului polarizat V_p se adaugă potenţialul sarcinilor superficiale libere V_σ şi potenţialul sarcinilor volumice reale V_ρ:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_v \frac{\rho - div\vec{P}}{R}dv + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\sigma + \left(\vec{P}\cdot\vec{n}\right)}{R}dS \tag{3.35}$$

sau

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_v \frac{\rho^*}{R}dv + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\sigma^*}{R}dS \tag{3.36}$$

în care

$$\begin{aligned}\rho^* &= \rho - div\vec{P} = \rho + \rho_p \\ \sigma^* &= \sigma + \left(\vec{P}\cdot\vec{n}\right) = \sigma + \sigma_p.\end{aligned} \tag{3.37}$$

3.5.2 Ecuaţiile locale ale câmpului electrostatic în interiorul si în exteriorul unui dielectric

Câmpul electric $\vec{E}$ în orice punct din interiorul sau din exteriorul dielectricului supus unui câmp $\vec{E}_0$ generat de o distribuţie volumică de sarcină de densitate ρ, este rezultanta câmpurilor $\vec{E}_0$ şi a câmpului $\vec{E}_p$ datorat distribuţiei volumice de dipoli. În definitiv, câmpul care acţionează asupra dielectricului nu este $\vec{E}_0$ ci $\vec{E}$. Efectiv acest câmp $\vec{E}$ este cel care determină polarizaţia $\vec{P}$ şi care figurează în formula (3.12)

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_p \tag{3.38}$$

Pentru a evidenţia proprietăţile câmpului electric $\vec{E}$ în interiorul sau în exteriorul dielectricului este convenabil să utilizăm ecuaţiile locale ale câmpurilor $\vec{E}_0$ şi $\vec{E}_p$ deoarece aceste ecuaţii scot în relief sursele acestor câmpuri. Astfel, câmpul $\vec{E}_0$ datorat sarcinilor reale de densitate volumică ρ se supune ecuaţiilor

$$\varepsilon_0 div\vec{E}_0 = \rho \quad \text{şi} \quad rot\vec{E}_0 = 0 \tag{3.39}$$

Câmpul $\vec{E}_p$ datorat distribuţiei volumice de dipoli de densitate volumică $\rho_p = -div\vec{P}$ se supune ecuaţiilor

$$\varepsilon_0 div\vec{E}_p = -div\vec{P} \quad \text{şi} \quad rot\vec{E}_p = 0 \tag{3.40}$$

Sumând membru cu membru ecuaţiile (3.39) şi (3.40) obţinem

$$\varepsilon_0 div\left(\vec{E}_0 + \vec{E}_p\right) = \rho - div\vec{P} \quad \text{şi} \quad rot\left(\vec{E}_0 + \vec{E}_p\right) = 0 \tag{3.41}$$

sau, ţinând seama de (3.38), aceste ecuaţii capătă forma următoare:

$$div\left(\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}\right) = \rho \quad \text{şi} \quad rot\vec{E} = 0 \tag{3.42}$$

sau încă, luând în consideraţie relaţia (3.25), $\vec{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\,\vec{E}$, ecuaţiile (3.42) descriu *câmpul în interiorul şi în exteriorul volumului v, (cu excepţia suprafeţei S care limitează acest volum)*, sub o formă mai simplă:

$$div\left(\varepsilon\vec{E}\right) = \rho \quad \text{şi} \quad rot\vec{E} = 0 \tag{3.43}$$

sau, în fine, cu $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ (formula (3.26),

$$div\vec{D} = \rho \quad \text{şi} \quad rot\vec{E} = 0 \tag{3.44}$$

Comparând formulele (3.43) cu (3.44) regăsim relaţia generală dintre vectorii $\vec{E}$, $\vec{D}$ şi $\vec{P}$ (formula (3.27)): $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$.

3.5.3 Câmpul electric la suprafaţa dielectricului

În cazul în care pe suprafaţa S, a dielectricului, există sarcini libere cu o densitate σ, care contribuie la câmpul $\vec{E}_0$, condiţia pe care trebuie s-o satisfacă acest câmp la traversarea suprafeţei S este:

$$\varepsilon_0\left[\vec{n}\cdot\left(\vec{E}_{0(+)} - \vec{E}_{0(-)}\right)\right] = \sigma \tag{3.45}$$

Pe de altă parte câmpul $\vec{E}_p$, datorat distribuţiei volumice de dipoli, are ca surse sarcinile superficiale de polarizare σ_p care apar pe suprafaţa S şi care, în acord cu formula (3.32), se exprimă ca, $\sigma_p = \left(\vec{n} \cdot \vec{P}_{(-)}\right)$

$$\varepsilon_0 \left[\vec{n} \cdot \left(\vec{E}_{p(+)} - \vec{E}_{p(-)}\right)\right] = \sigma_p = \left(\vec{n} \cdot \vec{P}_{(-)}\right) \tag{3.46}$$

Câmpul total $\overrightarrow{E}_{(+)}$ şi $\overrightarrow{E}_{(-)}$ de o parte şi de alta a suprafeţei S este,

$$\vec{E}_{(+)} = \vec{E}_{0(+)} + \vec{E}_{p(+)} \qquad \text{şi} \qquad \vec{E}_{(-)} = \vec{E}_{0(-)} + \vec{E}_{p(-)} \tag{3.47}$$

Sumând membru cu membru ecuaţiile (3.45) şi (3.46), şi ţinând cont de relaţia (3.25) potrivit căreia $\vec{P}_{(-)} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\,\vec{E}_{(-)}$, obţinem următoarea *condiţie la limită pentru componentele normale ale câmpului electric* $\vec{E}$:

$$\varepsilon_0 \left(\vec{n} \cdot \vec{E}_{(+)}\right) - \varepsilon \left(\vec{n} \cdot \vec{E}_{(-)}\right) = \sigma \tag{3.48}$$

Componentele tangenţiale ale câmpurilor $\vec{E}_0$ *şi* $\vec{E}_p$ sunt continue la fel ca şi cele ale câmpului rezultant $\vec{E}$:

$$\left[\vec{n} \times \left(\vec{E}_{(+)} - \vec{E}_{(-)}\right)\right] = 0 \tag{3.49}$$

Formulele (3.48) şi (3.49) exprimă condiţiile la limită pe suprafaţa S a dielectricului, $\vec{n}$ fiind normala exterioară volumului v. Aceste formule completează formulele (3.43) care erau valabile pretutindeni cu excepţia suprafeţei S.

3.6 Condiţii de trecere prin suprafaţa de contact dintre doi dielectrici.

3.6.1 Condiţii de trecere

Considerăm că la suprafaţa de separaţie S a doi dielectrici cu permeabilităţi diferite, ε_1 şi ε_2, se află sarcini libere distribuite pe suprafaţă, având densitatea σ şi, fie $\vec{E}_{01}$ şi $\vec{E}_{02}$ câmpurile electrice într-un punct M, de o parte şi de cealaltă a suprafeţei S, datorate acestor sarcini şi oricăror alte surse exterioare dielectricilor (Fig. 3.7). Condiţia de trecere pentru componentele

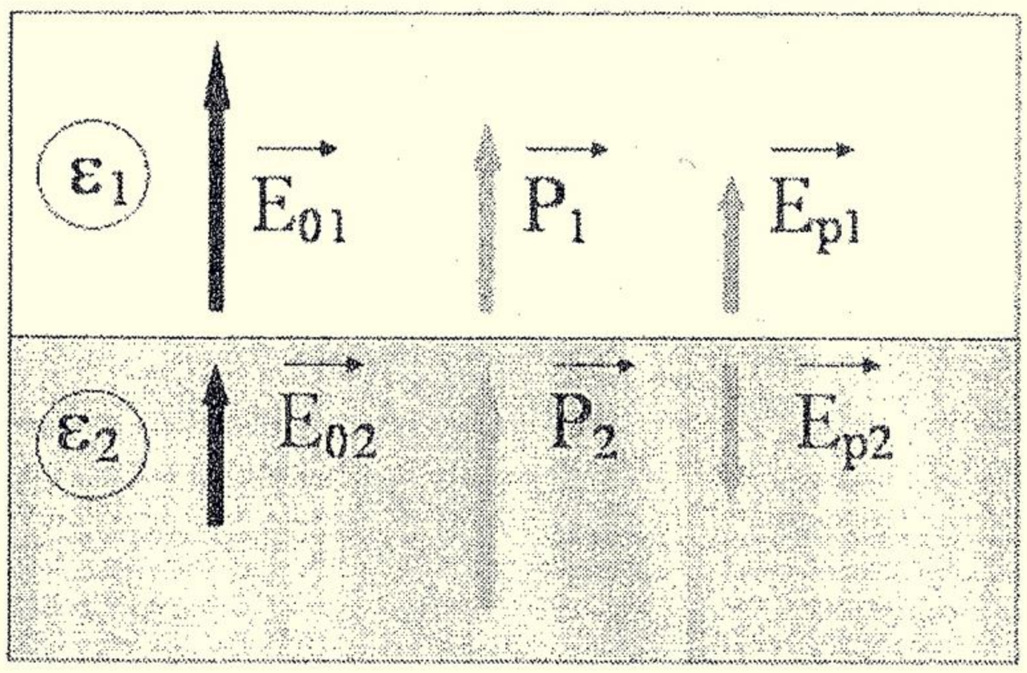


Figura 3.7: Refracţia vectorilor $\vec{E}$ şi $\vec{D}$ la traversarea suprafeţei de separaţie dintre doi dielectrici

normale este:

$$\varepsilon_0 \left[\overrightarrow{n} \cdot \left(\overrightarrow{E}_{01} - \overrightarrow{E}_{02} \right) \right] = \sigma(M) \tag{3.50}$$

Fie $\vec{E}_{p1}$ şi $\vec{E}_{p2}$ câmpurile produse de polarizaţiile $\vec{P}_1$ şi $\vec{P}_2$ în cei doi dielectrici. Din motive similare celor invocate în paragraful precedent, aceste câmpuri se supun condiţiei

$$\varepsilon_0 \left[\overrightarrow{n} \cdot \left(\overrightarrow{E}_{p1} - \overrightarrow{E}_{p2} \right) \right] =$$

$$= \overrightarrow{n} \cdot \left(\overrightarrow{P}_2 - \overrightarrow{P}_1 \right) = \overrightarrow{n} \cdot (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \overrightarrow{E}_2 - \overrightarrow{n} \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \overrightarrow{E}_1 \tag{3.51}$$

Adunând membru cu membru (3.50) şi (3.51) şi ţinând cont de relaţiile

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{01} + \vec{E}_{p1} \qquad şi \qquad \vec{E}_2 = \vec{E}_{02} + \vec{E}_{p2},$$

obţinem în final expresia următoare:

$$\varepsilon_1 \left(\vec{n} \cdot \vec{E}_1 \right) - \varepsilon_2 \left(\vec{n} \cdot \vec{E}_2 \right) = \sigma \tag{3.52}$$

Pentru componentele tangenţiale avem relaţia:

$$\left[\vec{n} \times \left(\vec{E}_1 - \vec{E}_2 \right) \right] = 0 \tag{3.53}$$

Se poate observa uşor că, dacă unul dintre dielectrici este vidul, de exemplu dielectricul (1) are permitivitatea ε_0 în loc de ε_1, formulele (4.52) şi (4.53) se reduc la formulele (3.48) şi (3.49) care au fost stabilite pentru această situaţie.

3.6.2 Refracţia liniilor de câmp la suprafaţa de separaţie a doi dielectrici

S-a văzut deja că formulele relative la câmp se simplifică dacă se utilizează vectorul inducţie electrică sau deplasare electrică $\vec{D}$ definit prin relaţia

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} \tag{3.54}$$

În mediile izotrope vectorul $\vec{D}$ are aceeaşi direcţie cu vectorul $\vec{E}$, aceşti vectori diferind doar prin mărimea lor. S-a văzut (3.44) că vectorul $\vec{D}$ se supune ecuaţiei

$$div\vec{D} = \rho$$

Ecuaţia (3.51) poate fi scrisă sub forma următoare, ca o condiţie de trecere a vectorului $\vec{D}$:

$$\overrightarrow{n} \cdot (\overrightarrow{D}_1 - \overrightarrow{D}_2) = \sigma \tag{3.55}$$

Dacă la suprafaţa de separaţie lipsesc sarcinile libere, $\sigma = 0$, componentele normale ale vectorului $\vec{D}$ sunt continue, şi de asemenea şi componentele tangenţiale ale câmpului electric sunt continue. Vectorii $\vec{E}$, respectiv $\vec{D}$ prin cele două medii cu permitivităţile ε_1 şi respectiv ε_2 se supun în acest caz condiţiilor (3.51) şi (3.52) care, cu $\sigma = 0$, capătă forma:

$$\varepsilon_1 E_1 \cos\alpha_1 = \varepsilon_2 E_2 \cos\alpha_2 \tag{3.56}$$

sau

$$D_1 \cos\alpha_1 = D_2 \cos\alpha_2$$

şi

$$E_1 \sin\alpha_1 = E_2 \sin\alpha_2 \tag{3.57}$$

Aceste ecuaţii (3.55) şi (3.56) reprezintă efectiv legile refracţiei vectorilor $\vec{E}$ şi $\vec{D}$ la suprafaţa de contact a celor doi dielectrici, (Fig. 3.8). Împărţind ecuaţiile (3.55) şi (3.56) membru cu membru se obţine relaţia dintre permitivităţi şi unghiurile de incidenţă şi de refracţie

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{tg\alpha_1}{tg\alpha_2} \tag{3.58}$$

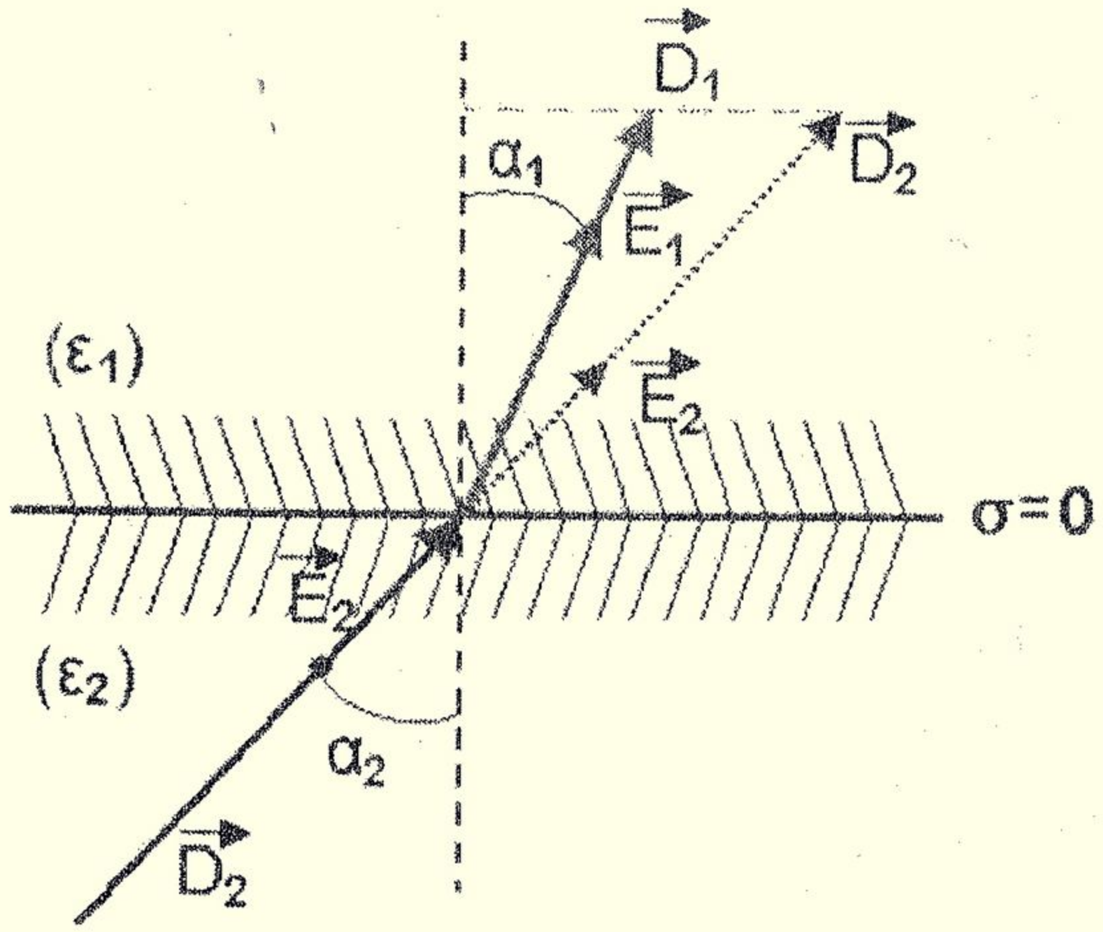


Figura 3.8: Refracţia vectorilor $\vec{E}$ şi $\vec{D}$ la traversarea suprafeţei de separaţie dintre doi dielectrici

3.7 Ecuaţiile locale pentru potenţialul electric în interiorul, la suprafaţa şi în exteriorul dielectricului.

Expresia locală a câmpului electric în dielectrici dată de prima formulă (3.43), valabilă pentru interiorul dielectricului, poate fi scrisă în general sub forma,

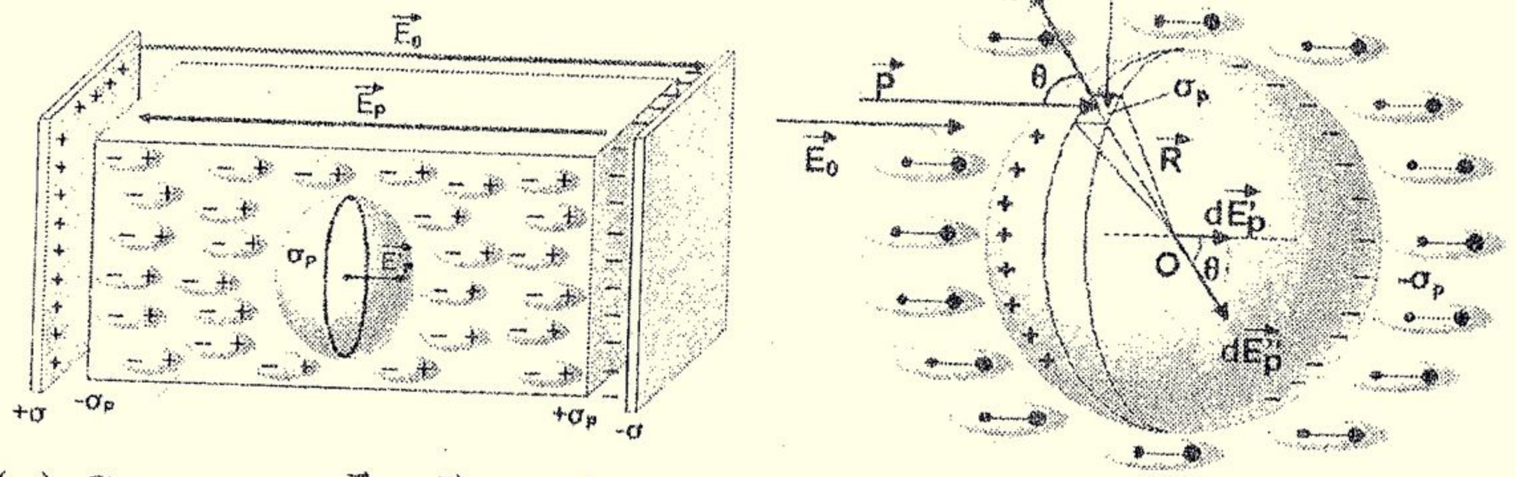
$$\varepsilon div\vec{E} + \left(\vec{E} \cdot grad\varepsilon\right) = \rho.$$

În virtutea relaţiei dintre potenţial şi câmpul electric, $\vec{E} = -gradV$ expresia precedentă capătă forma,

$$\varepsilon\Delta V + (gradV \cdot grad\varepsilon) = -\rho \tag{3.59}$$

Această ecuaţie cu derivate parţiale, care dă potenţialul în interiorul dielectricului, este complicată dar, dacă dielectricul este omogen, ea poate să capete o formă simplificată. În acest caz $\varepsilon = const.$, respectiv $grad\varepsilon = 0$ şi

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{3.60}$$



(a) Câmpurile $\vec{E}_0$, $\vec{E}_p$ şi $\vec{E}'_p$ într-un dielectric polarizat omogen

(b) Schemă pentru calculul câmpului $\vec{E}'_p$ al cavităţii polarizate

Figura 3.9: Câmpul efectiv în dielectrici

De cele mai multe ori $\rho = 0$ în interiorul dielectricului şi potenţialul se supune ecuaţiei Laplace

$$\Delta V = 0. \tag{3.61}$$

3.8 Câmpul efectiv în dielectrici.

Să precizăm mai întâi noţiunea de câmp efectiv. Presupunem pentru simplificare un dielectric constituit din molecule nepolare, situat între armăturile unui condensator. Sarcinile libere de densitate $\pm\sigma$, aflate pe armăturile condensatorului creează câmpul uniform $\vec{E}_0$, în timp ce sarcinile superficiale $\pm\sigma_p$ de pe feţele dielectricului, datorate polarizării moleculelor, creează câmpul $\vec{E}_p$. Mai trebuie să luăm în consideraţie şi câmpul $\vec{E}'_p$ care apare în cavităţile dintre molecule. Acest câmp $\vec{E}'_p$ este datorat sarcinilor care apar pe suprafaţa cavităţii, ele provenind de la dipolii moleculelor care înconjoară cavitatea (Fig. 3.9(a)). Dacă se consideră o cavitate de formă sferică, suficient de mică pentru ca mărimile macroscopice $\vec{E}_0$, $\vec{E}_p$ şi $\vec{P}$ să fie constante în întregul volum al sferei, pe suprafaţa emisferei stângi a acestei cavităţi se vor afla sarcini de polarizare $+\sigma_p$ iar pe suprafaţa emisferei din dreapta sarcini $-\sigma_p$. Aceste sarcini de pe suprafaţa cavităţii vor produce în centrul sferei un câmp $\vec{E}'_p$ care, în cazul dielectricilor omogeni, este coliniar cu $\vec{E}_0$ şi $\vec{E}_p$, având sensul câmpului $\vec{E}_0$.

În consecinţă, dacă situăm o moleculă în interiorul acestei cavităţi, aceasta se va afla în câmpul efectiv

$$\vec{E}_{ef} = \vec{E}_0 + \vec{E}_p + \vec{E}'_p = \vec{E} + \vec{E}'_p \tag{3.62}$$

Pentru a calcula câmpul $\vec{E'}_p$, considerăm un element de suprafaţă dS de pe suprafaţa cavităţii sferice de rază $\vec{R}$ (Fig. 3.9(b)). Acest element de suprafaţă poartă sarcina $dq_p = \sigma_p dS$, care va produce în centrul O al cavităţii câmpul elementar $d\vec{\tilde{E}}_p$ în direcţia razei $\vec{R}$. Câmpul în direcţia polarizaţiei $\vec{P}$ este $d\vec{E'}_p = d\vec{\tilde{E}}_p \cos\theta$, în care θ este unghiul dintre direcţia câmpului polarizant exterior $\vec{E}_0$ şi direcţia vectorului $d\vec{\tilde{E}}_p$:

$$d\vec{E'}_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma_p dS}{R^2}\frac{\vec{R}}{R}\cos\theta$$

Dar densitatea sarcinilor de polarizare σ_p de pe suprafaţa cavităţii este egală cu densitatea sarcinilor de polarizare de pe suprafaţa exterioară a dielectricului, şi aceasta, la rândul ei, este, în cazul polarizării uniforme a dielectricului, egală cu polarizaţia normală, conform formulelor (3.10) şi (3.32).

$$\sigma_p = \left(\vec{P}\cdot\vec{n}\right) = P\cos\theta.$$

Elementul de suprafaţă fiind $dS = R^2\sin\theta d\theta d\varphi$, câmpul $\vec{E'}_p$ se obţine după efectuarea integralei,

$$E'_p = \frac{P}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi}\cos^2\theta\sin\theta d\theta = -\frac{P}{2\varepsilon_0}\frac{1}{3}\int_0^{\pi} d\left(\cos^3\theta\right) = \frac{P}{3\varepsilon_0}.$$

Se observă imediat că acest câmp $\vec{E'}_p$, datorat sarcinilor de polarizare de pe suprafaţa cavităţii, este constant în interiorul cavităţii,

$$\vec{E'}_p = \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}. \tag{3.63}$$

În final expresia câmpului efectiv în dielectrici (4.62) capătă forma următoare:

$$\vec{E}_{ef} = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0} \tag{3.64}$$

3.9 Mecanisme de polarizare a dielectricilor

3.9.1 Mecanismul polarizării dielectricilor cu molecule nepolare. Formula lui Clausius Mosotti

O moleculă nepolară (sau un atom) situată în câmpul efectiv $\vec{E}_{ef}$ devine un dipol al cărui moment electric, $\vec{p}_i$, indus este proporţional cu câmpul,

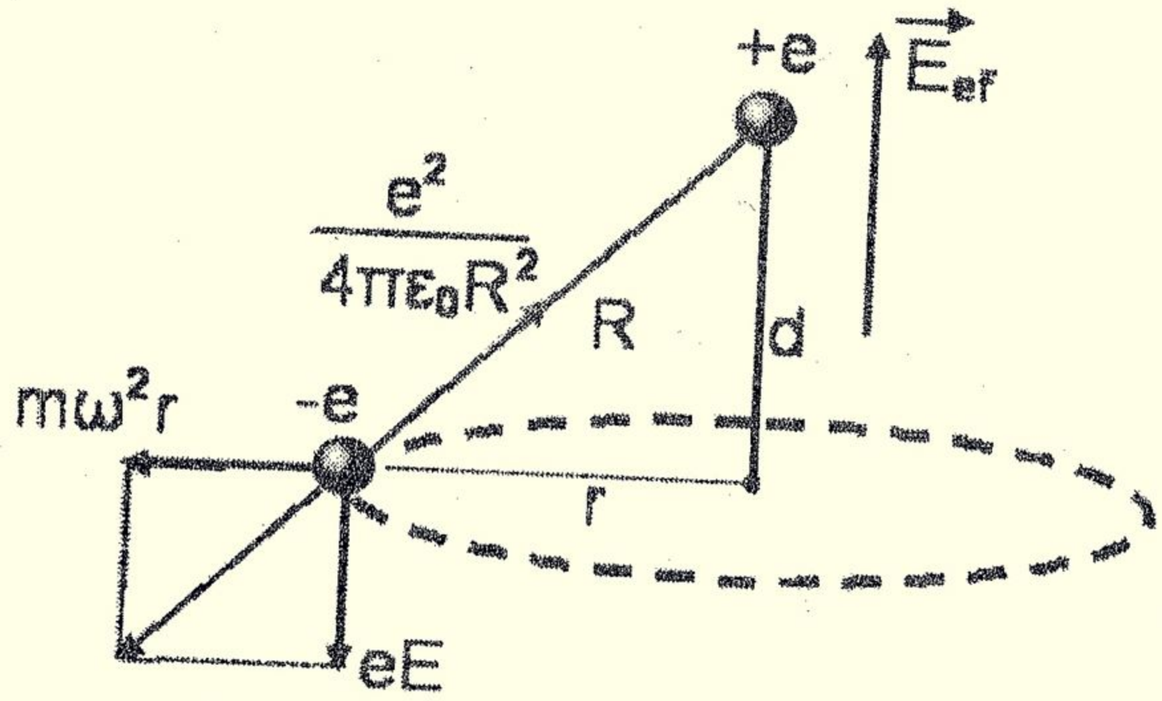


Figura 3.10: Schemă pentru calculul factorului α în cazul atomului de hidrogen

(dacă acesta nu este exagerat de mare), depinde de natura moleculei şi dispare odată cu înlăturarea câmpului:

$$\vec{p}_i = \alpha \vec{E}_{ef}. \tag{3.65}$$

Pentru un atom, factorul α poate fi estimat relativ simplu: Fie un atom cu un singur electron orbital (cazul atomului de hidrogen), situat în câmpul efectiv $\vec{E}_{ef}$, (Fig. 3.10). În absenţa câmpului forţa de interacţiune coulombiană joacă rolul unei forţe centripete:

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = m\omega^2 r \tag{3.66}$$

În prezenţa câmpului efectiv $\vec{E}_{ef}$, centrul de simetrie al sarcinii negative se va îndepărta la distanţa d de sarcina pozitivă $+e$, atomul comportându-se astfel ca un dipol având momentul indus $\overrightarrow{p}'_1 = e\overrightarrow{d}$. În acest caz din (Fig. 3.10) se deduce imediat relaţia:

$$\frac{d}{r} = \frac{eE_{ef}}{m\omega^2 r}$$

şi de aici

$$\overrightarrow{p} = \frac{e^2}{m\omega^2}\overrightarrow{E}_{ef} = 4\pi\varepsilon_0 r^3 \overrightarrow{E}_{ef} \tag{3.67}$$

Din relaţia (3.64), se poate estima expresia factorului α pentru atomul de hidrogen, $\alpha = 4\pi\varepsilon_0 r^3$, în timp ce, pentru atomul de hidrogen în starea fundamentală, mecanica ondulatorie dă o valoare ceva mai mare: $\alpha = 4\pi\varepsilon_0 \frac{9}{2} r^3$.

Factorul α este deci o constantă caracteristică a atomului şi se numeşte *polarizabilitate atomică.*

În cazul moleculelor, factorul α este o constantă caracteristică a moleculei, se numeşte *polarizabilitate moleculară* şi reprezintă o mărime numeric egală cu *momentul electric pe care îl capătă o moleculă când aceasta se află în câmpul efectiv* $E_{ef} = 1 volt/metru$. Semnificaţia acestei mărimi poate fi extinsă şi la moleculele care nu sunt izotrope (în care $\vec{p}_i$ nu mai este dirijat paralel cu vectorul $\vec{E}_{ef}$), dar în acest caz α este o *polarizabilitate medie.*

Considerăm un dielectric omogen, constituit din molecule nepolare în care fiecare moleculă, supusă câmpului efectiv $\vec{E}_{ef}$, contribuie la polarizaţia dielectricului cu momentul electric $\vec{p}_i$. Dacă n este *numărul de molecule pe unitatea de volum*, polarizaţia dielectricului $\vec{P}$, definită ca momentul electric al unităţii de volum, este:

$$\vec{P} = n\vec{p}_i = n\alpha\vec{E}_{ef} = n\alpha\left(\vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}\right) \tag{3.68}$$

Înlocuind vectorul $\vec{P}$, această formulă devine, în virtutea formulei (3.25),

$$\vec{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\,\vec{E} = n\alpha\left(\vec{E} + \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)\,\vec{E}}{3\varepsilon_0}\right) = n\alpha\left(\frac{\varepsilon + 2\varepsilon_0}{3\varepsilon_0}\right)\vec{E}. \tag{3.69}$$

Prima şi ultima variantă a acestor egalităţi ne permit să obţinem o formă convenabilă pentru a exprima polarizabilitatea în funcţie de permitivitate:

$$\frac{n\alpha}{3\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} \tag{3.70}$$

Formula devine aplicabilă în practică dacă facem să apară în ea constante de material accesibile ca, masa volumică sau *densitatea* δ, *masa moleculară* M, *şi numărul lui Avogadro* $N_A = 6{,}025.10^{23}\ \mathrm{mol}^{-1}$. Dat fiind că,

$$\frac{n}{N_A} = \frac{\delta}{M} \tag{3.71}$$

formula (3.67) ia forma următoare

$$\frac{N_A\alpha}{3\varepsilon_0} = \frac{M}{\delta}\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} = P, \tag{3.72}$$

cunoscută ca *relaţia lui Clausius-Mosotti*. Mărimea P este numită impropriu *polarizaţie molară*, deoarece dimensiunile ei nu sunt cele ale unei polarizaţii, (Coulomb/m^2), ci ale unui volum (m^3). Importanţa ei constă în faptul că ea reprezintă efectiv polarizabilitatea α multiplicată cu un factor constant $(N_A/3\varepsilon_0)$ şi se exprimă în funcţie de mărimi ce pot fi determinate cantitativ pentru orice dielectric cu molecule nepolare, M, δ, ε. Această relaţie poate fi întâlnită şi sub altă formă, dacă se înlocuiesc permitivităţile absolute ale mediului dielectric şi vidului, cu permitivitatea relativă, $\varepsilon_r = \varepsilon/\varepsilon_0$.

$$P = \frac{M}{\delta}\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} \tag{3.73}$$

Permitivitatea ε_r poate fi determinată prin măsurarea capacităţii electrice C a unui condensator având între armături mediul dielectric de permitivitate ε şi măsurarea capacităţii C_0 a aceluiaşi condensator între armăturile căruia, după înlăturarea dielectricului, s-a făcut vid, (permitivitatea fiind ε_0). În acest caz $\varepsilon_r = C/C_0$.

Deoarece momentele dipolare induse de câmpul efectiv în dielectricii cu moleculele nepolare apar ca o consecinţă a deplasării electronilor, şi cum inerţia acestora este foarte slabă, polarizaţia rămâne practic insensibilă la viteza de variaţie a câmpului electric, indiferent dacă această viteză este nulă ca în condiţiile câmpului electrostatic, sau este diferită de zero ca în condiţiile propagării perturbaţiilor electromagnetice sub formă de unde electromagnetice, sau de radiaţii luminoase. Teoria propagării undelor electromagnetice conduce, cum vom stabili în finalul acestui curs, la *relaţia lui Maxwell* care, în cazul dielectricilor, ne permite să exprimăm permitivitatea relativă sub forma

$$\varepsilon_r = n^2 \tag{3.74}$$

în care n reprezintă indicele de refracţie absolut al mediului ($n = c/v$, raportul dintre viteza de propagare a perturbaţiei electromagnetice în vid (c) şi viteza de propagare (v) în mediul dielectric). Aşadar, relaţia Clausius Mosotti (3.72) mai poate fi scrisă şi sub forma următoare, făcând să intervină indicele de refracţie absolut al mediului dielectric:

$$P = \frac{M}{\delta}\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \tag{3.75}$$

Având în vedere natura electromagnetică a radiaţiilor luminoase, măsurarea indicelui de refracţie n poate fi efectuată în cazul mediilor dielectrice

transparente, prin metode clasice bazate pe refracţia radiaţiilor monocromatice în domeniul vizibil. De exemplu, se verifică, în cazul benzenului lichid, că măsurările de capacitate electrică dau valoarea permitivităţii relative $\varepsilon_r = 2,284$, iar măsurările optice de indice de refracţie pentru radiaţia D a sodiului dau o valoare foarte apropiată $n^2 = 2,253$. În aceste variante relaţia Clausius-Mosotti oferă largi posibilităţi de studiu a polarizabilităţii moleculelor nepolare, în diferite condiţii fizice, (densitate, presiune, temperatură), şi în diferite stări de agregare în care se află materialul dielectric, (solid, lichid, gaz). În principiu, pentru o substanţă dată, polarizabilitatea α şi, implicit polarizaţia molară P n-ar trebui să depindă de aceste condiţii fizice, cu toate că ε_r depinde în mod necesar. Determinările experimentale făcute cu diferiţi dielectrici cu molecule nepolare confirmă această presupunere. De exemplu,

Anhidridă carbonică gazoasă la diferite presiuni

Presiunea (atm)	50	100	150
$\varepsilon/\varepsilon_0$	1,043	1,104	1,191
P	7,67	7,73	7,82

Hexan lichid la diferite temperaturi

Temperatura (^oC)	-60	-20	+20	+60
$\varepsilon/\varepsilon_0$	2,063	1,972	1,912	1,843
P	29,15	29,23	29,29	29,16

Benzen în diferite stări de agregare

Benzen	solid	lichid	gaz
$\varepsilon/\varepsilon_0$	2,60	2,31	1,003
P	26,70	26,54	28,3

Datele prezentate în aceste tabele, atestă că, pentru moleculele unei substanţe date, valorile polarizaţiei molare P, respectiv, ale polarizabilităţii α, rămân practic invariabile când se modifică parametrii fizici menţionaţi.

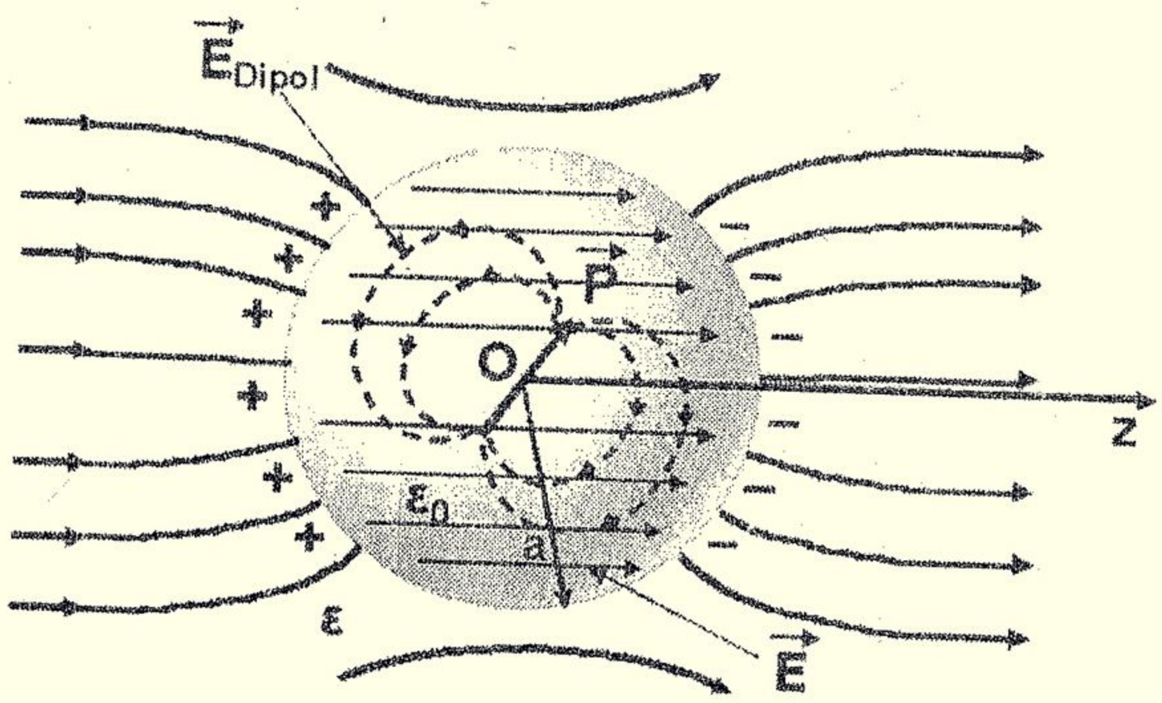


Figura 3.11: Câmpul efectiv $\vec{E}'_{ef}$

3.9.2 Mecanismul polarizării dielectricilor cu molecule polare

În aceşti dielectrici fiecare moleculă posedă un moment electric permanent $\vec{p}$. Vom neglija deocamdată momentul electric indus $\vec{p}_i$ care, de cele mai multe ori, este foarte mic în raport cu $\vec{p}$. Considerând că fiecare dintre aceşti dipoli moleculari se află într-o cavitate sferică înconjurată de moleculele vecine, câmpul electric efectiv $\vec{E}'_{ef}$ va fi diferit de câmpul efectiv Lorentz $\vec{E}_{ef}$ definit mai înainte (3.63) deoarece câmpul care acţionează asupra dipolului este rezultanta a două câmpuri: câmpul care ar exista în cavitatea sferică goală (în absenţa dipolului) şi câmpul de reacţie al dipolului situat în cavitate (Fig. 3.11).

Considerăm o cavitate sferică de rază a situată într-un mediu omogen de permitivitate ε. Câmpul electric $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_p$, fiind uniform în interiorul sferei şi dirijat în direcţia axei Oz, potenţialul acestui câmp poate fi scris ca

$$V_0 = -Ez. \tag{3.76}$$

Dacă în interiorul cavităţii se află un dipol elementar, potenţialul total în exteriorul cavităţii poate fi scris ca suma potenţialelor câmpului acestui dipol şi a câmpului E:

$$V_e = \left(1 - A\frac{a^3}{R^3}\right) V_0 \tag{3.77}$$

Al doilea termen corespunde potenţialului unui dipol al cărui moment electric, orientat după axa Oz, este $p = 4\pi\epsilon_0 a^3 AE$ (vezi de exemplu (3.66)).

În interiorul sferei potenţialul este

$$V_i = (1 - A)\, V_0 \tag{3.78}$$

Expresiile potenţialelor (3.74) şi (3.75) satisfac ecuaţia lui Laplace. Când $R \to \infty$, $V_i \to V_0$, deci se regăseşte valoarea câmpului la distanţă mare. La limită, pentru $R = a$, prima condiţie, cea referitoare la continuitatea potenţialelor (3.76) şi (3.77), se verifică,

$$(V_i)_{R=a} = (V_e)_{R=a}\,. \tag{3.79}$$

Condiţia de trecere a câmpului electric prin suprafaţa sferei, fiind

$$\varepsilon \left(\frac{\partial V_e}{\partial R}\right)_{R=a} = \varepsilon_0 \left(\frac{\partial V_i}{\partial R}\right)_{R=a}, \tag{3.80}$$

aceasta dă

$$\varepsilon\,(2A + 1) = \varepsilon_0\,(1 - A)$$

de unde rezultă,

$$A = \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon}{\varepsilon_0 + 2\varepsilon}. \tag{3.81}$$

Ecuaţiile (3.76) şi (3.78) dau câmpul total în interiorul sferei

$$\vec{E}_i = \vec{E'}_{ef} = (1 - A)\, \vec{E} \tag{3.82}$$

şi, ţinând cont de (3.81), obţinem expresia finală a câmpului efectiv:

$$\vec{E'}_{ef} = \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0 + 2\varepsilon}\vec{E} \tag{3.83}$$

Acest câmp este cunoscut sub numele de *câmp efectiv Onsager*.

3.9.3 Mecanismul polarizării dielectricilor izotropi cu molecule polare

În prezenţa câmpului efectiv $\vec{E'}_{ef}$ fiecare moleculă polară, având momentul electric propriu $\vec{p}$ şi căpătând *energia electrostatică*

$$W = -\left(\vec{p} \cdot \vec{E'}_{ef}\right) = -pE'_{ef} \cos\theta, \tag{3.84}$$

are tendinţa să-şi orienteze momentul electric în direcţia acestui câmp $\vec{E}'_{ef}$. La nivel molecular însă, *energia termică* per moleculă, fiind proporţională cu temperatura absolută T,

$$W_T = k_B T, \tag{3.85}$$

provoacă fluctuaţii termice care au tendinţa să antreneze momentul electric în direcţii aleatorii, opunându-se astfel procesului de orientare. În condiţiile unui număr mare de molecule repartizate uniform în volumul dielectricului considerat izotrop, orientarea momentelor electrice elementare, într-un câmp electric $\vec{E}'_{ef}$ dat şi la o temperatură T dată, va trebui să corespundă unui echilibru statistic al forţelor de orientare a momentelor datorate câmpului $\vec{E}'_{ef}$ şi al forţelor de fluctuaţii termice al căror efect de împrăştiere aleatorie a momentelor este proporţional cu T. Acest echilibru statistic are loc pentru fiecare moleculă în condiţiile unui compromis între energiile (3.84) şi (3.85) puse în joc. Notăm cu n numărul de molecule *pe unitatea de volum*. Pentru o temperatură T dată, şi într-un câmp $\vec{E}'_{ef}$ dat, un număr dn de molecule din sistem vor avea momentele electrice orientate sub unghiuri cuprinse între θ şi $\theta + d\theta$ (Fig. 3.12). În conformitate cu legile statisticii clasice, numărul de molecule dn ale căror momente, la temperatura T şi în câmpul $\vec{E}'_{ef}$, se găsesc în unghiul solid $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$, este proporţional cu factorul de probabilitate $\exp(-W/W_T)$:

$$dn = C \exp\left(\frac{pE'_{ef}}{k_B T}\cos\theta\right) \sin\theta d\theta d\varphi \tag{3.86}$$

Introducând notaţia

$$a = \frac{pE'_{ef}}{k_B T} \tag{3.87}$$

se obţine, după integrarea expresiei (3.84), o relaţie între numărul de molecule pe unitatea de volum, n, şi constanta C

$$n = C \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} e^{a\cos\theta} \sin\theta d\theta \tag{3.88}$$

eliminând constanta C între ecuaţiile (3.84) şi (3.86), şi ţinând seama de faptul că momentul electric asociat celor dn molecule reprezintă momentul volumic sau polarizaţia, $d\vec{P} = \vec{p}dn$, şi totodată că, în direcţia câmpului $\vec{E}'_{ef}$ (axa Oz, (Fig. 3.12)), fiecare moleculă contribuie la polarizaţia totală numai cu proiecţia momentului ei pe această direcţie, $p\cos\theta$, şi integrând ecuaţia

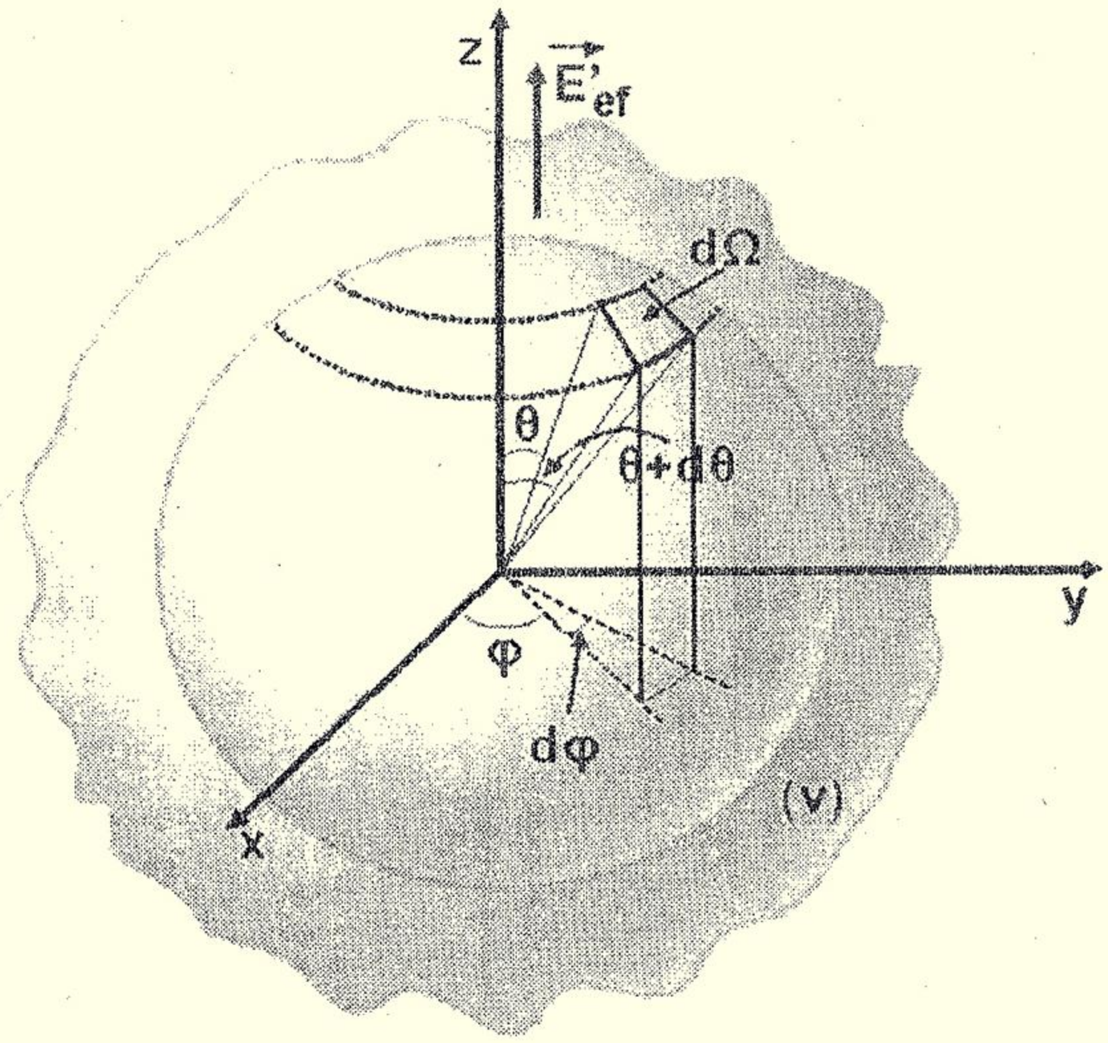


Figura 3.12: Schemă pentru calculul polarizaţiei unui ansamblu de molecule polare situat în câmpul efectiv $\vec{E}'_{ef}$

(3.84) obţinem:

$$P = np\frac{\int_0^\pi \cos\theta e^{a\cos\theta}\sin\theta d\theta}{\int_0^\pi e^{a\cos\theta}\sin\theta d\theta} \tag{3.89}$$

Introducem notaţia,

$$\Psi = \int_0^\pi e^{a\cos\theta}\sin\theta d\theta, \tag{3.90}$$

şi experesia polarizaţiei (3.89) capătă o formă mai simplă,

$$P = np\frac{1}{\Psi}\frac{d\Psi}{da}. \tag{3.91}$$

Calculul integralei (3.90) este simplu: După o schimbare de variabilă, $a\cos\theta = u$ şi $-a\sin\theta = du$, se obţine imediat

$$\Psi = \frac{1}{a}\int_{-a}^{+a} e^u du = \frac{1}{a}\left(e^a - e^{-a}\right) = \frac{2}{a}sha$$

După înlocuire lui Ψ în (3.89), se obţine

$$P = np\left(\coth a - \frac{1}{a}\right) \tag{3.92}$$

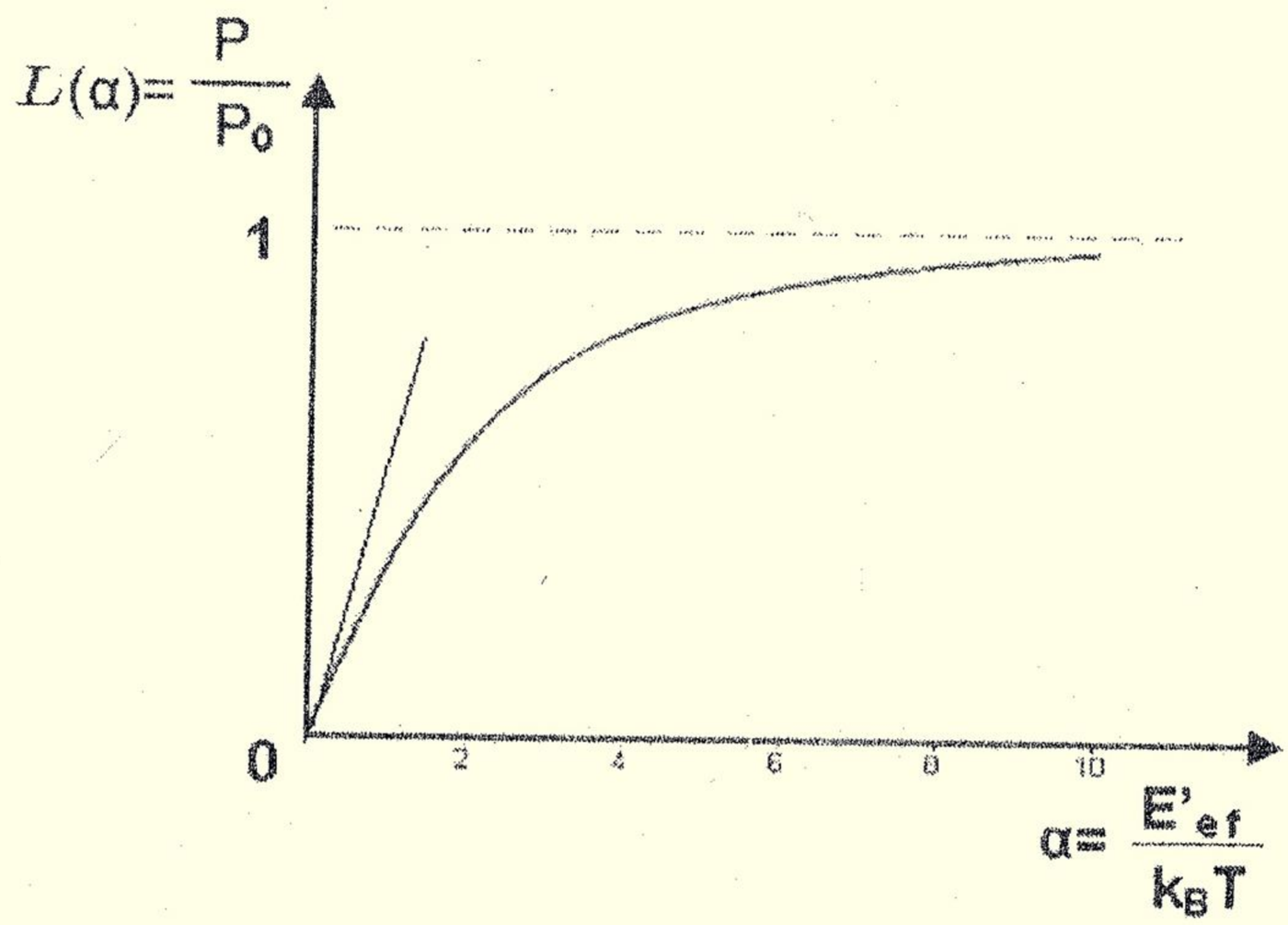


Figura 3.13: Reprezentarea grafică a funcţiei lui Langevin de argument α. Domeniul de linearitate al funcţiei pentru $\alpha = 1$

În această expresie, factorul np reprezintă polarizaţia dielectricului în cazul în care toţi dipolii sunt aliniaţi în direcţia câmpului. Acest caz este posibil numai în absenţa agitaţiei termice şi aceasta se poate întâmpla numai dacă temperatura $T = 0\ K$. Deci

$$P_0 = np \tag{3.93}$$

reprezintă polarizaţia dielectriculuiând temperatura absolută a acestuia este egală cu zero. Expresia din paranteză,

$$L(a) = \coth a - \frac{1}{a} \tag{3.94}$$

este cunoscută sub numele de *funcţia lui Langevin.* Cu aceste consideraţii, *expresia polarizaţiei dielectricului, $P(a)$, la o temperatură oarecare T şi în câmpul $\vec{E}'_{ef}$* capătă următoarea formă generală,

$$P(a) = P_0 L(a) \tag{3.95}$$

în care alura polarizaţiei reduse $P(a)/P_0$ este efectiv alura funcţiei lui Langevin (Fig. 3.13).

Se observă că, pentru $a >> 1$, polarizaţia tinde către o valoare de saturaţie, $P(a) \to P_0$. Această saturaţie necesită condiţii extreme practic imposibil

de realizat: temperaturi apropiate de 0 K şi câmpuri extrem de intense. Pentru a ne face o idee despre valorile uzuale ale parametrului a, este suficient să înlocuim în expresia (3.87) valoarea pe care trebuie să o ia $\vec{E'}_{ef}$ la temperatura ambiantă $T \cong 300K$, pentru ca parametrul a să fie egal cu unitatea ($a = 1$): Cu $p \approx 3 \cdot 10^{-30} Cm$ şi cu $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} J/K$ ar fi necesar un câmp de ordinul $\vec{E'}_{ef} \approx 1.38 \cdot 10^9 V/m$. Acest câmp este enorm şi tensiunea creată în orice dielectric ar depăşi cu mult tensiunea de străpungere. Valorile uzuale ale câmpului care produce tensiuni inferioare tensiunii de străpungere nu depăşesc $10^6 V/m$. Aceasta înseamnă că, *în condiţii normale de lucru, parametrul a este mult mai mic decât unitatea.* Cu $a << 1$ exponenţialele $e^{\pm a}$ pot fi dezvoltate în serie şi astfel funcţia lui Langevin (3.9.3) se reduce la

$$L(a) = \frac{a}{3} + \frac{a^3}{45} + \cdots \tag{3.96}$$

Dar, fiindcă $a << 1$, termenii care conţin pe a la puteri superioare unităţii pot fi neglijaţi şi, în consecinţă, expresia polarizaţiei capătă o formă în care este evident că *polarizaţia variază proporţional cu câmpul efectiv şi totodată invers proporţional cu temperatura absolută:*

$$P = np\frac{a}{3} = \frac{np^2}{3k_B T} E'_{ef} \tag{3.97}$$

sau, sub forma vectorială,

$$\vec{P} = \frac{np^2}{3k_B T} \overrightarrow{E'_{ef}} \tag{3.98}$$

Pentru a exprima complet polarizaţia dielectricului constituit din molecule polare va trebui să adăugăm la această polarizaţie orientaţională şi contribuţia polarizaţiei induse în fiecare moleculă. Conform celor stabilite mai înainte această polarizaţie indusă este datorată câmpului efectiv Lorentz. Într-un caz particular, de exemplu cel al mediilor dielectrice diluate, în stare de gaz rarefiat, în care valoarea permitivităţii relative este apropiată de unitate ($\varepsilon_r = 1$), valorile câmpurilor efective Lorentz, $\vec{E}_{ef}$ (formula (4.64)), şi Onsager $\vec{E'}_{ef}$ (formula (3.83)) sunt egale: ($E'_{ef} = \vec{E}_{ef}$). În acest caz polarizaţia totală va fi dată de formula lui Langevin-Debye ca o sumă a polarizaţiilor indusă şi orientaţională:

$$\vec{P} = n\left[\alpha + \frac{p^2}{3k_B T}\right] \vec{E}_{ef} \tag{3.99}$$

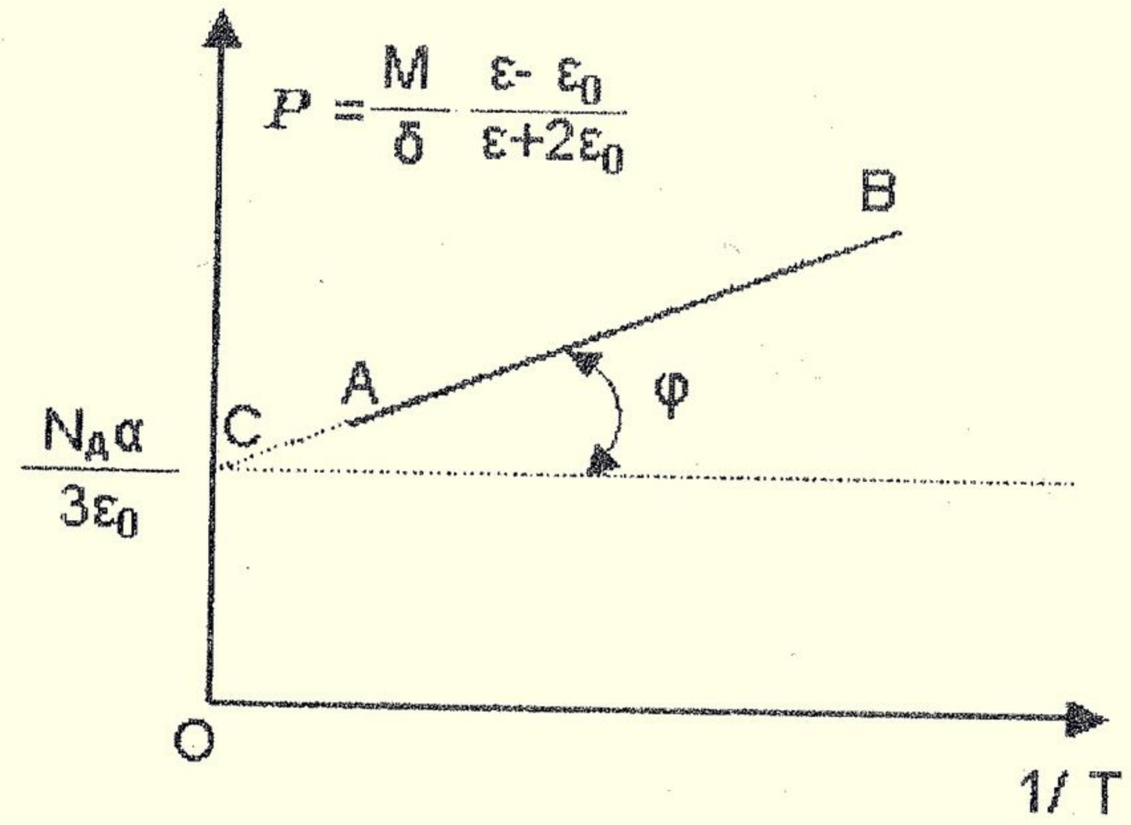


Figura 3.14: Variaţia polarizaţiei molare P cu inversul temperaturii

Numeric, cei doi termeni ai polarizabilităţii sunt de acelaşi ordin de mărime, al doilea termen fiind totuşi descrescător când T creşte, fapt care antrenează o variaţie în acelaşi sens a susceptibilităţii şi a permitivităţii. Când temperatura T este extrem de coborâtă, apropiată de 1 K, parametrul $a = pE_{ef}/k_BT$ poate să atingă, chiar cu câmpuri uzuale, valori de ordinul câtorva unităţi, şi $L(a) \to 1$, respectiv $P(a) \to P_0$, fapt care înseamnă că toate moleculele sunt orientate paralel cu câmpul, în pofida agitaţiei termice devenită în acest caz foarte slabă. Aceasta este semnificaţia fizică a asimptotei orizontale a curbei lui Langevin (Fig. 3.13). Cu $n = (\delta N_A)/M$, se obţine o expresie a polarizaţiei molare P, determinată de Debye, care se verifică foarte bine în cazul gazelor.

$$P = \frac{N_A}{3\varepsilon_0}\left(\alpha + \frac{p}{3k_BT}\right) = \frac{M}{\delta}\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} \tag{3.100}$$

Studiul dependenţei de temperatură a polarizaţiei molare, oferă posibilitatea de a determina polarizabilitatea α şi momentul dipolar p. Reprezentând grafic P în funcţie de $1/T$ se obţine o dreaptă $\overline{AB}$ (Fig. 3.14), a cărei intersecţie cu axa ordonatelor defineşte pe această axă segmentul $\overline{OC}$ şi formează cu abscisa unghiul φ; măsurarea acestora oferă posibilitatea de a determina polarizabilitatea α şi momentul electric p:

$$\overline{OC} = \frac{N_A}{3\varepsilon_0}\alpha, \qquad tg\varphi = \frac{N_A}{9\varepsilon_0 k_B}p \tag{3.101}$$

Datele experimentale dau $p = 0$ pentru moleculele de CO_2, CH_4, CCl_4, N..., indicând că aceste molecule sunt nepolare. Pentru moleculele polare, p este de ordinul 10^{-30} C/m. De exemplu, moleculele de apă, (H_2O), au $\pm P_s = 6{,}2.10^{-30}$ C/m, moleleculele de acid clorhidric, (HCl), au momentul $p = 3{,}4.10^{-30}$ C/m. Astfel de măsurări pot da indicaţii asupra structurii moleculelor. Moleculele tri-atomice, care au structură liniară, au un moment electric nul, în timp ce moleculele cu structură triunghiulară au totdeauna $p \neq 0$. Moleculele tetra-atomice au momentul electric nul dacă ele au o structură plană, sau un moment diferit de zero dacă au structura piramidală.

3.10 Dielectrici neliniari. Feroelectrici.

Mediile dielectrice descrise anterior sunt constituite din molecule care au momentele electrice dezordonate prin efectul temperaturii. Polarizaţia lor, $\vec{P}$ este proporţională cu câmpul electric în domeniul câmpurilor slabe şi variază reversibil cu câmpul. Acestea sunt aşa numite *medii dielectrice liniare*. Există o serie de substanţe ale căror proprietăţi electrice diferă net de acestea. Mai întâi ele se remarcă printr-o susceptibilitate $\chi = P/E$ enormă în câmpuri electrice relativ mici, care variază nelinear cu câmpul electric şi cu temperatura. Variaţiile periodice ale câmpului electric între două valori $\pm E$ pun în evidenţă un fenomen de histerezis (întârziere) al polarizaţiei $\vec{P}$ faţă de câmp. Aceasta atinge o valoare de saturaţie $\pm P_s$ la valori nu prea mari ale câmpului electric exterior E, şi nu se mai anulează când se suprimă câmpul, $(E = 0)$, ci păstrează o polarizaţie remanentă $\pm P_r$; aceasta dispare numai când câmpul opus polarizaţiei, pentru a anula forţele coercitive care menţin această polarizaţie remanentă, capătă anumite valori $\pm E_c$ numite câmp coercitiv. În acest fel polarizaţia în funcţie de câmp descrie un ciclu de histerezis ca în (Fig. 3.15)

Polarizaţia de saturaţie P_s este o funcţie descrescătoare de temperatură care se anulează la o anumită valoare T_c a acesteia, numită *punct Curie* sau *temperatură Curie*. La unele substanţe s-a pus în evidenţă existenţa a două astfel de temperaturi. Aceste proprietăţi sunt foarte asemănătoare celor puse în evidenţă, cu mult timp înainte, la substanţele feromagnetice şi, din acest motiv, mediile dielectrice neliniare menţionate au căpătat denumirea, de altfel improprie, de *substanţe feroelectrice*. La temperaturi mai mari decât temperatura Curie, susceptivitatea electrică se supune unei legi de tip Curie-Weiss, $\chi = C/(T - T_c)$, (Fig. 3.16) iar proprietăţile feroelectrice descrise

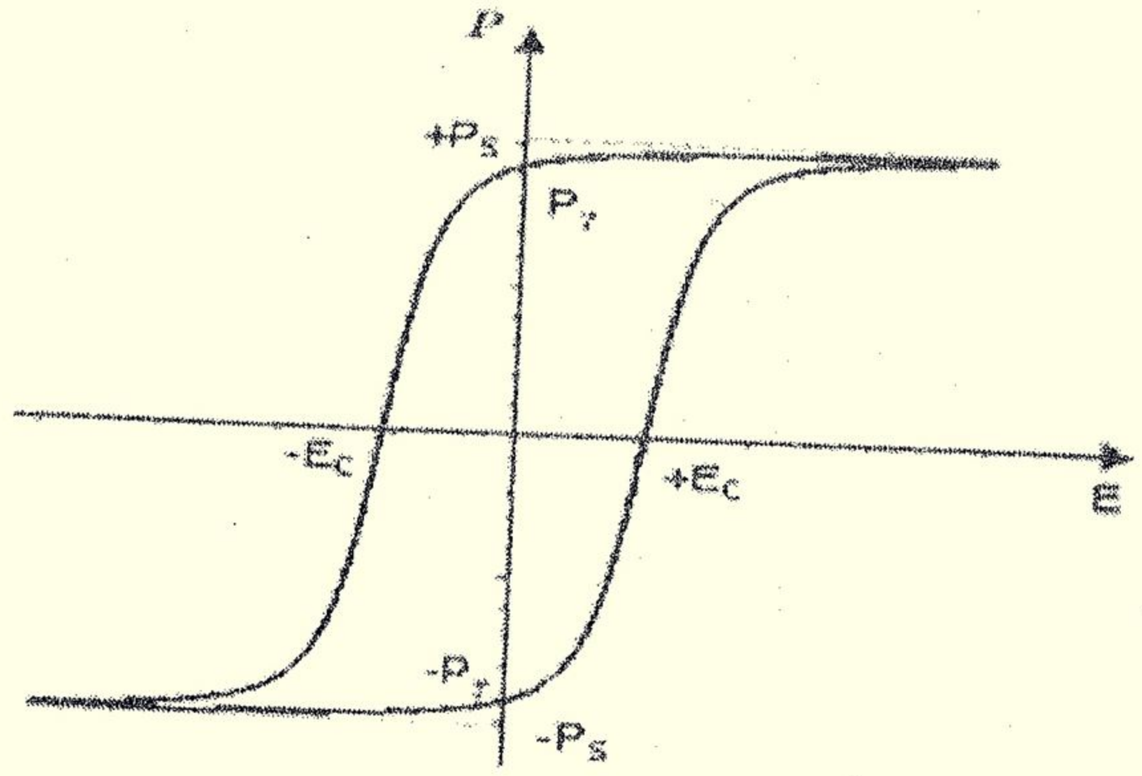


Figura 3.15: Ciclul de histerezis al polarizaţiei dielectricilor neliniari

mai sus dispar, substanţele feroelectrice căpătând *proprietăţile paraelectrice* ale dielectricilor liniari obişnuiţi, descrise anterior.

La aceleaşi temperaturi de tranziţie, de la starea ordonată feroelectrică la starea dezordonată paraelectrică, au fost puse în evidenţă anomalii şi în variaţia termică a unor mărimi neelectrice ce caracterizează substanţele feroelectrice. Acest fapt atestă că feroelectricitatea îşi are originea în proprietăţi structurale intrinsece ale acestor materiale. Se admite astfel preexistenţa în substanţa feroelectrică a unei structuri de domenii de volume foarte mici în care momentele electrice sunt aliniate complet. Această *polarizaţie spontană* a domeniilor feroelectrice este efectiv egală cu *polarizaţia de saturaţie* $\vec{P}_s$ ridicată pe curba de polarizare $P(E)$ a dielectricului masiv. Aceasta, deoarece la saturaţie toate momentele electrice ale domeniilor spontane sunt aliniate paralel cu câmpul, la fel ca în fiecare domeniu. În acest caz, polarizaţia spontană $\vec{P}_s$ a fiecărui domeniu de volum v_i şi de moment electric $\vec{p}_i$ este aceeaşi cu a întregului feroelectric constituit din N domenii polarizate la saturaţie, având volum total $v = \sum_{i=1}^{N} v_i$ şi momentul electric total $\vec{p} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i$ şi astfel,

$$\vec{P}_s = \frac{\vec{p}_i}{v_i} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i}{\sum_{i-1}^{N} v_i} = \frac{\vec{p}}{v} \tag{3.102}$$

Starea depolarizată a unui feroelectric $\vec{p} = 0$, corespunde unei repartiţii a momentelor electrice ale domeniilor spontane conforme principiului minimului energiei libere totale. Aceasta înseamnă că domeniile se auto-organizează

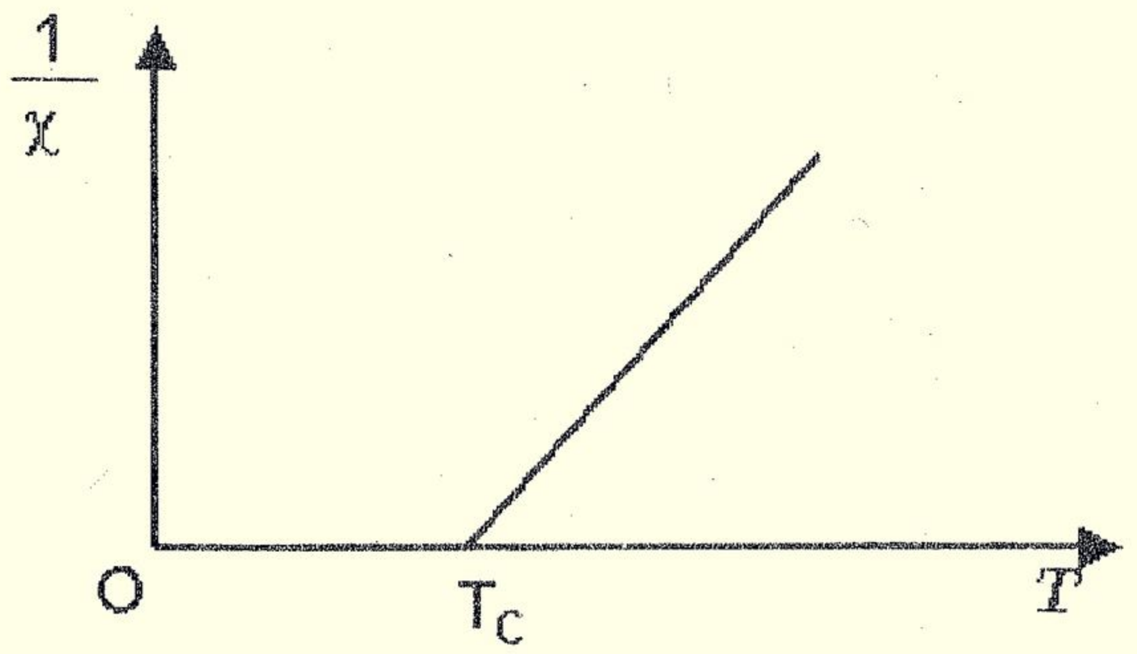


Figura 3.16: Variaţia termică a susceptivităţii feroelectricilor în domeniul temperaturilor superioare punctului Curie T_c

astfel înât rezultanta momentelor electrice ale tuturor domeniilor să fie nulă. Cel mai simplu aranjament al domeniilor spontane vecine, în conformitate cu acest principiu, corespunde unei orientări antiparalele a momentelor domeniilor vecine. Polarizarea progresivă a unui astfel de ansamblu de domenii, în prezenţa unui câmp electric exterior, are loc printr-un mecanism de rotaţie progresivă a momentelor domeniilor către direcţia câmpului şi printr-un mecanism de deplasare a pereţilor interdomenici. Aceste mecanisme necesită câmpuri mult mai slabe decât în cazul moleculelor izolate. Energia câmpului electric exterior, necesară pentru polarizarea unui sistem de molecule polare izolate, este în general mare, aceasta folosind pentru a învinge efectul forţelor de împrăştiere termică a momentelor izolate, pe ând în cazul polarizării feroelectricilor, domeniile cărora sunt deja polarizate la saturaţie în absenţa câmpului, energia electrică necesară polarizării este considerabil mai mică. Aceasta, deoarece ea este cheltuită doar pentru a învinge efectul forţelor care asigură echilibrul termodinamic al structurii de domenii spontane, respectiv efectul forţelor care tind să anuleze momentul electric rezultant al acestei structuri.

Proprietăţile mai sus menţionate au fost puse în evidenţă, succesiv, la o mare diversitate de materiale feroelectrice, începând cu primele constatări în cazul cristalelor de sare de Seignette numite adeseori *cristale Seignetto-electrice* (un tartrat dublu de sodiu şi potasiu cu formula chimică:

$NaKC_4H_4O_6.4H_2O$).

Studiul variaţiei termice a permitivităţii acestui Seignetto-electric a pus

în evidenţă existenţa a două puncte Curie ($+22,5^o$ şi -15^oC) şi o permitivitate relativă ε_r de aproape 6000 la temperatura camerei. Ulterior capul de afiş al investigaţiilor asupra materialelor feroelectrice a aparţinut titanatului de bariu $BaTiO_3$). O primă tentativă de interpretare a acestor proprietăţi necesită mai întâi estimarea câmpului electric care este necesar pentru a menţine paralel toate momentele electrice ale moleculelor ce alcătuiesc un domeniu de polarizare spontană. Această estimare este posibilă dacă echivalăm energia termică necesară pentru a distruge polarizaţia spontană, cu energia electrică necesară pentru a menţine în fiecare domeniu orientarea paralelă a tuturor momentelor electrice ale moleculelor. Notând cu $\vec{E}_m$ *câmpul electric molecular* care asigură această aliniere, egalarea energiei electrice (per moleculă), $W_E = -\vec{p}\cdot\vec{E}_m$, cu energia termică la temperatura Curie (la care se distruge alinierea momentelor electrice) $W_T = k_B T_c$, se poate aprecia că $\vec{E}_m$ este de ordinul lui $k_B T_c/p$. În cazul titanatului de Ba, $T_c = 393K$ şi, cu $k_B = 1,38.10^{-23}J/K$ şi $p \approx 10^{-30}C.m$, se estimează că energia electrostatică şi câmpul $\vec{E}_m$ necesare pentru a asigura stabilitatea polarizaţiei spontane este

$$W_E \approx 5.10^{-21}J \qquad \text{şi} \qquad E_m \approx 5.10^9 V/m \tag{3.103}$$

Această energie este enormă în raport cu energia de interacţiune electrostatică W_{es} dintre dipoli. Într-adevăr, să considerăm că, în reţeaua cristalină a titanatului de Ba, un dipol $\vec{p}$ aparţinând unei molecule, este situat în câmpul electric $\vec{E}_d$ al dipolului moleculei imediat vecine aflată la distanţa $a \approx 4.10^{-9}m$ egală cu constanta reţelei cristaline. Energia dipolului în acest câmp este $W_{es} = -\left(\vec{p}\cdot\vec{E}_d\right)$. Câmpul creat de dipol la distanţa a fiind $E_d = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{a^3}$, se obţin valorile)

$$W_{es} \approx 10^{-25}J \qquad \text{şi} \qquad E_d \approx 10^5 V/m \tag{3.104}$$

care sunt evident cu câteva ordine de mărime mai slabe decât cele ale energiei W_E şi ale câmpului $\vec{E}_m$ din domeniile de polarizare spontană.

Pe de altă parte, este normal să presupunem că acest câmp $\vec{E}_m$, care se exercită asupra unui dipol dat, trebuie să fie cu atât mai mare cu cât este mai mare densitatea volumică a dipolilor vecini care produc acest câmp, deci cu cât este mai mare polarizaţia $\vec{P}$. Există deci o relaţie de proporţionalitate între $\vec{E}_m$ şi $\vec{P}$,

$$\vec{E}_m = \omega\vec{P}, \tag{3.105}$$

în care constanta de proporţionalitate ω reprezintă o *constantă de interacţiune* dintre dipoli, interacţiune care, aşa cum s-a văzut deja, nu este de tipul interacţiunilor clasice dintre dipoli Totodată această interacţiune trebuie să depindă de natura cristalului feroelectric.

Câmpul efectiv $\vec{\tilde{E}}_{ef}$ care acţionează asupra fiecărui dipol, în procesul polarizării unui feroelectric, este prin urmare o sumă de două câmpuri: Câmpul de interacţiune local $\vec{E}_m$ la care se adaugă câmpul $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_p$ (în care $\vec{E}_0$ este produs de sursele exterioare dielectricului, şi $\vec{E}_p$ este datorat sarcinilor de polarizare superficială a feroelectricului),

$$\vec{\tilde{E}}_{ef} = \vec{E} + \vec{E}_m = \vec{E} + \omega \vec{P} \tag{3.106}$$

Cu aceste consideraţii, mecanismul polarizării unui feroclectric poate fi examinat în aceeaşi manieră ca în cazul polarizării moleculelor polare, utilizând expresia lui Langevin (3.9.3) a polarizaţiei în funcţie de câmp şi de temperatură,

$$P(a) = P_0 L(a) \tag{3.107}$$

în care $P_0 = np$, însă argumentul a trebuie să fie modificat prin înlocuirea câmpului efectiv $\vec{E}'_{ef}$ cu $\vec{\tilde{E}}_{ef}$ şi astfel

$$a = \frac{p\tilde{E}_{ef}}{k_B T} = \frac{p}{k_B T}(E + \omega P) = \frac{P_0}{RT}(E + \omega P) \tag{3.108}$$

în care $R = nk_B$. Soluţiile ecuaţiilor (3.105) şi (3.107) interpretează fenomenele observate relativ la polarizaţia feroelectricilor respectiv, a) *independenţa polarizaţiei spontane de câmpul electric exterior*, b) *variaţia termică a polarizaţiei de saturaţie* P_s, c) *temperatura Curie* T_c, d) *comportarea paraelectrică la temperaturi superioare punctului Curie* $(T > T_C)$
Pentru a reprezenta grafic funcţiile (3.105) şi (3.106) introducem notaţia

$$y = \frac{P}{P_0} = L(a) \tag{3.109}$$

şi, după înlocuirea lui P din ecuaţia (3.104), obţinem o a doua funcţie de aceeaşi variabilă

$$y = -\frac{E}{\omega P_0} + \frac{RT}{\omega P_0^2} a \tag{3.110}$$

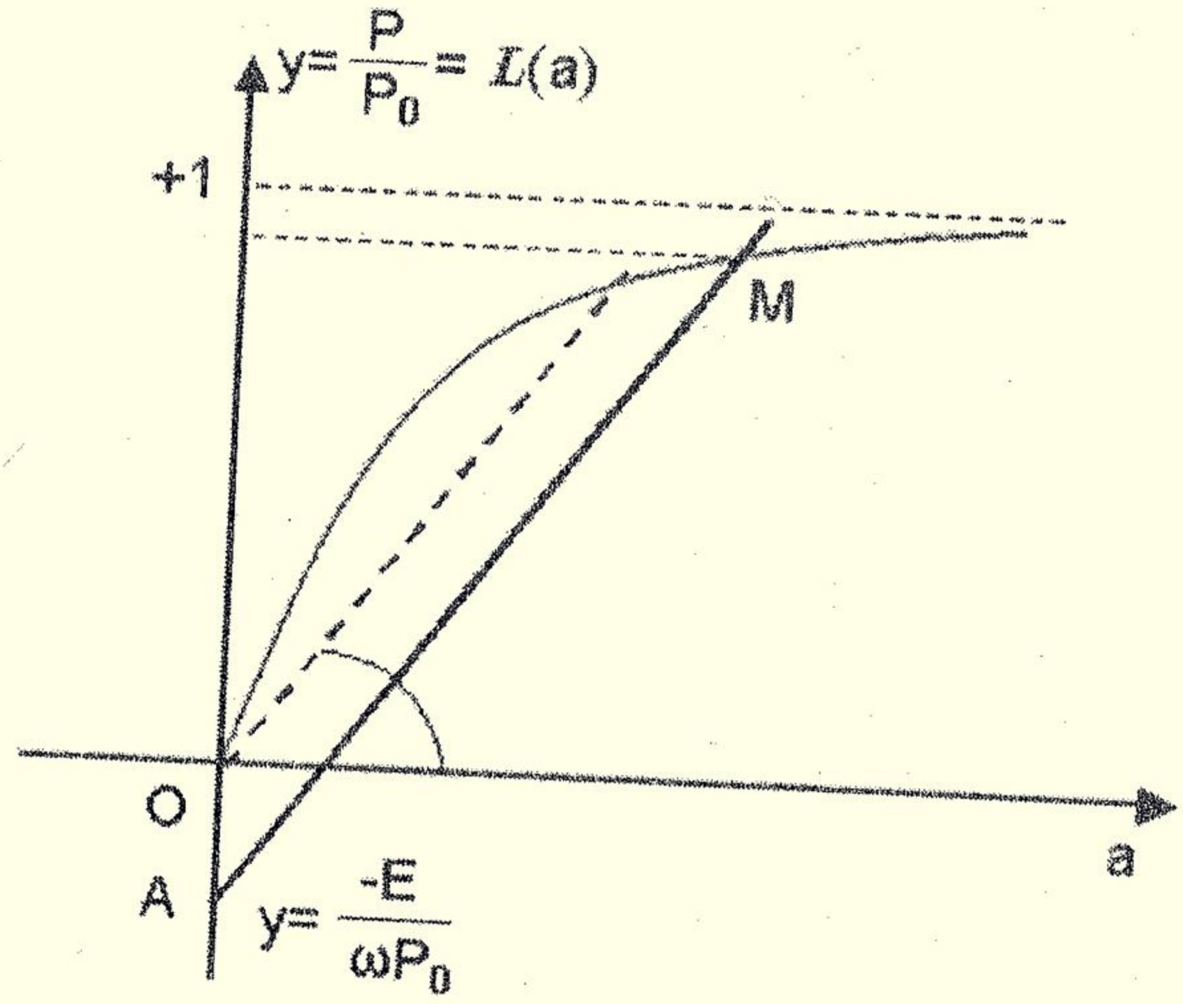


Figura 3.17: Reprezentarea grafică a funcţiei lui Langevin

Cele două funcţii au o soluţie comună corespunzând punctului de intersecţie a curbei lui Langevin (3.107) cu dreapta (3.108). (Fig. 3.17) dă reprezentarea grafică a celor două funcţii.

Următoarele aspecte experimentale pot fi interpretate imediat în această teorie:

a) *Independenţa polarizaţiei spontane de câmp.* Pentru $a = 0$, dreapta (3.106) intersectează ordonata în punctul A corespunzând lui $y = -(E/\omega P_0)$, şi totodată curba lui Langevin în punctul M. Pentru un câmp E dat şi o temperatură T dată, punctului de intersecţie corespunzător, M îi corespunde o anumită valoare a polarizaţiei reduse. Fie această valoare $P(E,T)/P_0$. Dacă se menţine temperatura constantă şi câmpul variază de la $E = 0$ la cea mai mare valoare permisă de experiment, să spunem de ordinul tensiunii de străpungere, care în cazul titanatului de Ba este, punctul A gliseză pe ordonată, pornind din originea O pentru care $y = 0$, până la distanţa maximă $y = -(10^6/\omega P_0)$. Apreciind, în confromitate cu formulele (3.100) şi (3.103), că $\omega P_0 \approx 10^9$, se deduce imediat că poziţia cea mai depărtată de origine a punctului A este la distanţa $y \approx -10^{-3}$. La scara reprezentării grafice, în care funcţia $y = L(a)$ poate să ia valoarea maximă $y = +1$, figurată la o scală de 100 mm, distanţa $y \approx -10^{-3}$ este de ordinul 0,1 mm; această distanţă este

comparabilă deci cu cea a grosimii unei trăsături fine de creion. În consecinţă poziţia punctului M, respectiv valoarea polarizaţiei reduse $P(E,T)/P_0$, rămâne practic insensibilă la orice variaţie a câmpului exterior cuprinsă între valorile extreme. Polarizaţia spontană la o temperatură T dată, preexistă, ea fiind este independentă de câmpul exterior.

b) Variaţia termică a polarizaţiei spontane. Temperatura Curie: Când temperatura variază, se modifică panta dreptei (3.108), respectiv poziţia punctului M pe curba lui Langevin. Neglijând în expresia (3.108), primul termen din membrul al doilea, din motivele expuse mai înainte, se poate exprima simplu panta acestei drepte:

$$tg\alpha = \frac{y}{a} = \frac{RT}{\omega P_0^2} \tag{3.111}$$

Când temperatura T coboară către zero absolut, α tinde către zero, antrenând o deplasare spre dreapta a punctului M către poziţia corespunzătoare ordonatei $y = +1$ pentru care polarizaţia spontană capătă valoarea maximă $P = P_0$.

Când temperatura T creşte, unghiul α creşte şi el, iar punctul M se deplasează spre stânga, antrenând valori tot mai mici ale polarizaţiei spontane, până când dreapta (3.108) devine tangentă la curba lui Langevin în origine. În acest caz limită, funcţia y tinde către zero, deci $P = 0$ şi evident acest caz corespunde momentului în care temperatura atinge punctul Curie, $T = T_c$. Valorile lui a fiind mult inferioare unităţii ($a << 1$) în vecinătatea originii, se poate utiliza aproximaţia (3.92) pentru funcţia lui Langevin şi expresia tangentei în origine la curba $y = L(a)$ devine

$$L'(0) = \left[\frac{1}{3} + \frac{a^2}{15} + \cdots\right]_{a=0} = \frac{1}{3} \tag{3.112}$$

Înlocuind în (3.109) $tg\alpha$ cu $L'(0)$ pentru $T = T_c$, se obţine următoarea expresie pentru temperatura Curie

$$T_c = \frac{\omega P_0^2}{3R} = \frac{\omega P_0^2}{3nk_B} \tag{3.113}$$

Eliminând pe R între ecuaţiile (3.108) şi (3.111) şi neglijând, din motive cunoscute, primul termen din membrul al doilea al ecuaţiei (3.108) şi totodată ţinând seama de (3.107), obţinem

$$a = \frac{3}{T/T_c} y = 3\frac{P/P_0}{T/T_c} \tag{3.114}$$

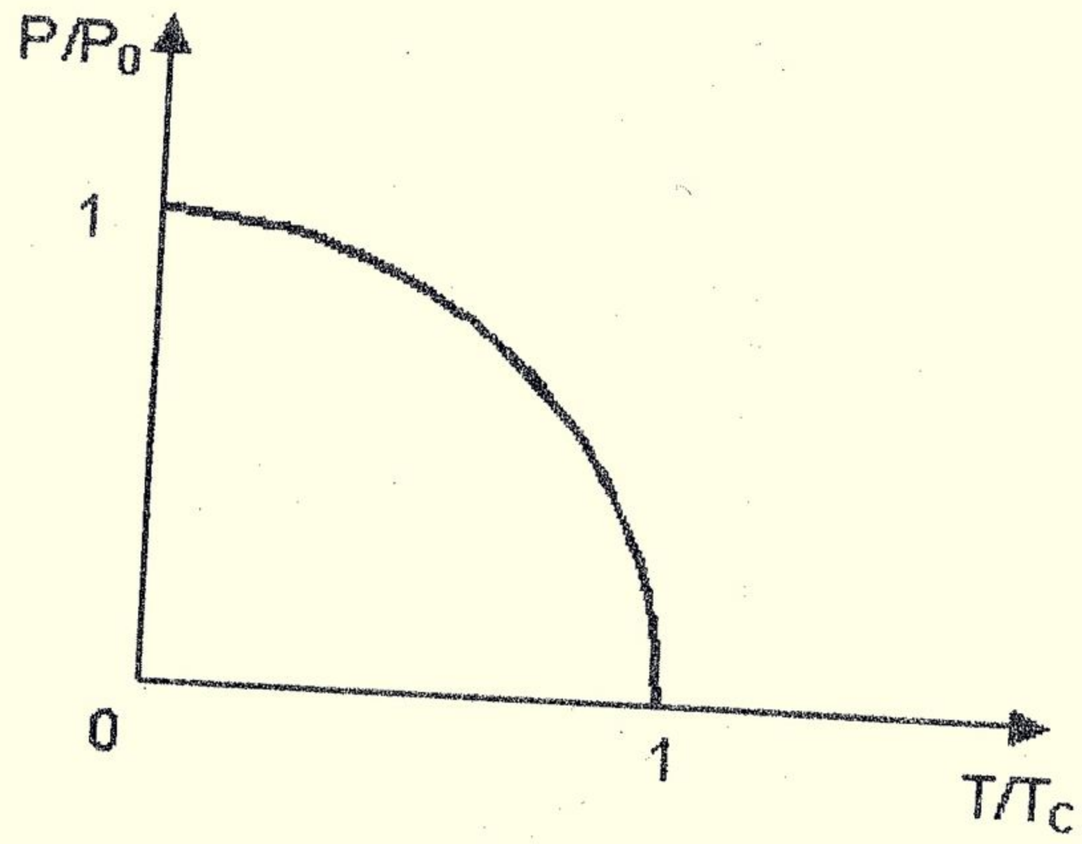


Figura 3.18: Variaţia termică a polarizaţiei

Cu această expresie a parametrului a, ecuaţia (3.107) capătă o formă care exprimă într-o manieră universală, (fără a necesita constante arbitrare), *legea de variaţie termică a polarizaţiei spontane*:

$$P/P_0 = L\left(3\frac{P/P_0}{T/T_c}\right) \tag{3.115}$$

Alura polarizaţiei în funcţie de temperatură, exprimată în valori reduse în formula (3.111), este reprezentată în (Fig. 3.18), şi principial ea este asemănătoare curbei experimentale $P(T)$,

c) Variaţia termică a susceptibilităţii electrice în domeniul temperaturilor superioare temperaturii Curie. Legea lui Curie-Weiss. Pentru toate temperaturile $T > T_c$ curba lui Langevin se confundă cu tangenta la curbă. ţinând seama de (3.110), şi de aproximaţia $a << 1$ valabilă în acest caz, ecuaţia (3.107) poate fi scrisă sub următoarele variante:

$$y = L(a) = L'(0)\,a = \frac{P}{P_0} = \frac{1}{3}a = \frac{P}{P_0} \tag{3.116}$$

Ultimele două variante ne permit să scriem că $a = 3(P/P_0)$. Substituind această expresie a lui a în ecuaţia (4.110) în care s-a înlocuit totodată constanta $R = (\omega P_0^2)/3T_c$, obţinem următoarea expresie:

$$y = -\frac{E}{\omega P_0} + \frac{T}{T_c}\frac{P}{P_0} = \frac{P}{P_0} \tag{3.117}$$

A doua variantă a acestei egalităţi permite determinarea expresiei susceptivităţii:

$$\frac{P}{E} = \chi = \frac{T_c}{\omega}\frac{1}{T - T_c} \tag{3.118}$$

Pentru un feroelectric dat, raportul T_c/ω reprezintă o constantă de material *numită constanta lui Curie, pe care o notăm cu* $C = (T_c/\omega)$ şi expresia (3.116) capătă forma cunoscută a *legii lui Curie-Weiss*

$$\chi = \frac{C}{T - T_c} \tag{3.119}$$

Cum se vede, această teorie dipolară poate interpreta în linii mari proprietăţile feroelectricilor, în particular cele referitoare la polarizaţia spontană sau de saturaţie P_s, evident fără a lua în seamă particularităţile structurale ale feroelectricilor. Acestea pot cauza comportări specifice care scapă acestei teorii. De exemplu, imposibilitatea interpretării celei de a doua temperaturi de tranziţie fero-para, existentă la o serie de feroelectrici la temperaturi inferioare punctului Curie considerat în această teorie, precum şi alte aspecte experimentale ne-integrabile în cadrul acestei teorii ca, dependenţa de granulaţia feroelectricului a temperaturii de tranziţie, şi altele, au determinat apariţia unor teorii care iau în consideraţie caracterul cuantic al interacţiunilor în cristalele feroelectrice.

3.11 Electreţi

Proprietăţi remanente asemănătoare celor puse în evidenţă la feroelectrici, au fost observate şi la anumiţi dielectrici care, fără a avea o structură de domenii. Topiţi si apoi solidificaţi în prezenţa unui câmp electric exterior, aceştia capătă un moment electric permanent după suprimarea câmpului. Aceste substanţe au fost denumite **electreţi**. Un dielectric organic, preparat în 1926 de Eguchi, dintr-un amestec de ceară de Carnauba şi de răşină cu puţină ceară de albine, punea în evidenţă pentru prima dată proprietăţile specifice electreţilor. Amestecul topit şi lăsat să se solidifice într-un câmp electric uniform de ordinul 100 V/m, creat între două armături plane, capătă sarcini negative în vecinătatea armăturii pozitive şi invers: în vecinătatea armăturii negative; cantitativ, aceste sarcini se micşorează continuu în timp de câteva zile, sfârşind prin a-şi inversa semnul. Apoi, aceste ultime sarcini subzistă în mod permanent şi nici o variaţie nu a fost observată timp de 3

ani. Fenomene asemănătoare, de polarizare remanentă, au fost relevate de asemenea şi în cazul esterilor, al hidrocarburilor cu molecule polare, şi la o serie de compuşi din grupa acizilor organici. Această polarizare permanentă a electreţilor prezintă multe analogii cu cea a magneţilor: Dacă se secţionează un electret în mai multe fragmente fiecare dintre acestea se comportă ca un electret. Pentru a conserva un electret se asigură o *conductivitate mare* între feţele polarizate permanent cu sarcini de semn contrar, punând în scurtcircuit cele două armături între care este situat dielectricul. Se procedează la fel cu un magnet permanent pentru a-i conserva magnetismul remanent, unindu-i polii cu un material care are o *permeabilitate mare*, cum este de exemplu fierul moale. În condiţii de umiditate, electreţii pierd sarcina, dar după uscare, dacă umiditatea nu este prea mare, aceştia revin la starea electrică pe care o aveau iniţial. Încălzirea progresivă până la topire distruge electretul definitiv. Pe lângă sarcinile care creează polarizarea rigidă, electreţii posedă şi sarcini reale, distribuite în volum şi, în general suma lor nu este nulă. Repartiţia volumică a acestor sarcini depinde de intensitatea câmpului polarizant: În câmpuri slabe ($E < 100kV/m$) se dezvoltă o sarcină spaţială negativă a cărei densitate volumică este mare în apropierea armăturii pozitive, devenind tot mai slabă în profunzime pentru ca, în apropierea armăturii negative să crească din nou cu sarcini de semn contrar. Repartiţia spaţială a sarcinilor este inversă în cazul câmpurilor mai intense ($E > 100kV/m$).

Complexitatea acestor fapte experimentale a dat naştere la numeroase încercări de integrare a lor în teorie pornind de la diferite ipoteze, dar nici una dintre ele nu este pe deplin satisfăcătoare.

Pentru a obţine câmpuri polarizante intense se dă electreţilor o formă de disc subţire. De exemplu, un electret având diametrul de 20 cm, este suficient pentru a face să lumineze o lampă cu neon de 2 watt. Electreţi aciculari au fost utilizaţi în electrometrele cu cadrane, la fel cum sunt utilizate acele magnetice în sistemul mobil al magnetometrelor.

3.12 Dielectrici anizotropi.

Un dielectric este anizotrop dacă proprietăţile lui depind de direcţia de observaţie. Dacă în cazul unui dielectric izotrop inducţia electrică este aceeaşi în orice direcţie, $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$, în cazul unui cristal aniotrop cu simetrie cubică, vectorul inducţie $\vec{D}$ va fi definit în funcţie de vectorul câmp $\vec{E}$, prin proiecţiile sale pe trei axe de coordonate oarecare, (1,2,3), care, într-un sis-

tem cartezian, pot fi axele (x,y,z). În acest caz permitivitatea ε, care era independentă de direcţie în dielectricii izotropi, va trebui să fie înlocuită cu tensorul permitivităţilor:

$$\begin{aligned} D_1 &= \varepsilon_{11}E_1 + \varepsilon_{12}E_2 + \varepsilon_{13}E_3 \\ D_2 &= \varepsilon_{21}E_1 + \varepsilon_{22}E_2 + \varepsilon_{23}E_3 \\ D_3 &= \varepsilon_{31}E_1 + \varepsilon_{32}E_2 + \varepsilon_{33}E_3 \end{aligned} \tag{3.120}$$

Pentru a determina direcţiile în care $\vec{D}$ este paralel cu $\vec{E}$, sau altfel, pentru care $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$, înlocuim în (4.120) componentele vectorului $\vec{D}$ care satisfac această condiţie:

$$\begin{aligned} \varepsilon E_1 &= \varepsilon_{11}E_1 + \varepsilon_{12}E_2 + \varepsilon_{13}E_3 \\ \varepsilon E_2 &= \varepsilon_{21}E_1 + \varepsilon_{22}E_2 + \varepsilon_{23}E_3 \\ \varepsilon E_3 &= \varepsilon_{31}E_1 + \varepsilon_{32}E_2 + \varepsilon_{33}E_3 \end{aligned} \tag{3.121}$$

Aceste ecuaţii, omogene în E_1, E_2, E_3, au soluţii diferite de zero numai dacă determinantul coeficienţilor lui E este nul, fapt care poate fi exprimat simplu, utilizând simbolul lui Kronecker δ_{ij}:

$$|\varepsilon_{ij} - \varepsilon\delta_{ij}| = 0 \tag{3.122}$$

în care $\delta_{ij} = 1$ pentru $i = j$ şi $\delta_{ij} = 0$ pentru $i \neq j$. În cazul general, ecuaţia (3.122), de ordinul trei în ε, are ca soluţii trei rădăcini distincte, $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ corespunzând celor trei direcţii privilegiate. Dacă aceste trei direcţii, respectiv axele electrice ale dielectricului anizotrop, sunt alese ca axe de coordonate, sistemul de ecuaţii (3.119) se reduce la

$$D_x = \varepsilon_x E_x \qquad D_y = \varepsilon_y E_y \qquad D_x = \varepsilon_z E_z \tag{3.123}$$

şi tensorul permitivităţii se reduce la cei trei termeni diagonali $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$. În particular când proprietăţile mediului sunt identice în cele trei direcţii ortogonale, $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon$, mediul este izotrop şi $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$.

3.13 Dielectrici reali

Proprietăţile dielectricilor conferă acestora un larg câmp de aplicaţie în calitate de izolatori. În particular, utilizarea lor ca medii dielectrice între

armăturile condensatorilor, presupune o bună cunoaştere a parametrilor care definesc calitatea acestora în condiţiile de lucru, respectiv limitele până la care proprietăţile lor rămân nealterate. Aceşti parametri sunt: Rigiditatea dielectrică, valoarea permitivităţii, temperatura maximă şi puterea disipată sau pierdută în dielectric când acesta este supus unui câmp electric variabil.

3.13.1 Rigiditatea dielectrică

Acest parametru dă informaţii asupra *câmpului minim pe care îl poate suporta un dielectric fără să se deterioreze* . Acest câmp este definit prin diferenţa de potenţial dintre două plane infinite considerate la distanţa de 1 cm în dielectric şi se exprimă adesea în kV/cm.

În *cazul dielectricilor în stare gazoasă*, străpungerea dielectricului, care are loc pentru câmpuri mai mari decât cele corespunzătoare rigidităţii, se produce sub formă de efluvii, de arc sau de sântei în funcţie de puterea pe care o poate disipa sursa. Dacă dielectricul este aer la presiunea atmosferică, rigiditatea este practic constantă ($\approx 30kV/cm$), indiferent de grosimea dielectricului. Rigiditatea dielectricului creşte însă cu creşterea presiunii; ea se micşorează dacă tensiunea este aplicată între electrozi sferici sau între vârfuri.

În *cazul dielectricilor lichizi* tensiunea de străpungere este practic independentă de distanţă şi, dacă impurităţile sunt absente, această tensiune este independentă şi de temperatură. Rigiditatea dielectrică a uleiului de transformator uscat poate să atingă 300 kV/cm.

În *cazul dielectricilor solizi*, tensiunea de străpungere nu mai este proporţională cu grosimea, ea putând să atingă o valoare limită independentă de grosime. De exemplu, nici un izolant solid nu poate să suporte o tensiune de 1 MV chiar dacă acesta are dimensiuni mari. De obicei tensiunile foarte înalte sunt suportate dacă ele sunt repartizate pe mai mulţi izolanţi în serie, aşa cum pot fi văzuţi pe liniile care transportă energia electrică sub tensiune înaltă.

3.13.2 Permitivitatea

Potrivit definiţiei, permitivitatea $\varepsilon = D/E$, este o mărime numeric egală cu inducţia electrică produsă într-un dielectric de un câmp electric egal cu unitatea, ($E = 1V/m$). Pentru a estima acest fapt prin comparaţie cu permitivitatea vidului, se utilizează în mod curent *permitivitatea relativă* $\varepsilon_r = \varepsilon/\varepsilon_0$, numită uneori putere inductoare specifică. Pentru izolanţi cu

molecule nepolare, valoarea lui ε_r este cuprinsă între 1 şi 7, în timp ce, pentru dielectrici cu molecule polare, de exemplu de apă, ea poate să atingă valori de 80-100; dar aceşti dielectrici nu sunt utilizabili în condensatori din cauză că, în general, au o conductivitate notabilă astfel înât pierderile prin efect joule sunt însemnate. Permitivităţi mari se obţin cu dielectrici feroelectrici care, în cazul titanatului de bariu, pot să depăşească 1000.

Oricum, un condensator este performant dacă, pe lângă calităţile relative la rigiditatea şi permitivitatea dielectricului, el oferă *cea mai mare capacitate posibilă* pentru *un volum minim de dielectric, sub cea mai mare tensiune de utilizare* compatibilă cu rigiditatea dielectricului. Astfel, performanţa, poate fi apreciată ca fiind proporţională cu mărimea C/v în care C este capacitatea condensatorului şi v volumul dielectricului. Pentru un condensator plan această capacitate este $C = \varepsilon S/e = \varepsilon v/e^2$, în care ε este permitivitatea dielectricului, S suprafaţa şi e grosimea lui, şi astfel $C/v = \varepsilon/e^2$. Tensiunea aplicată condensatorului fiind V, câmpul electric în dielectric este $E = V/e$, şi raportul precedent poate fi scris încă sub forma:

$$\frac{C}{v} = \frac{\varepsilon}{e^2} = \frac{\varepsilon E^2}{V^2}$$

Câmpul E maxim corespunde valorii rigidităţii, $E_{\max}$, şi astfel performanţa unui condensator supus la tensiunea de utilizare maximă $V_{\max}$, este caracterizată prin valoarea raportului $CV_{\max}^2/v = \varepsilon E_{\max}^2$. Pentru un dielectric dat, factorul $\varepsilon E_{\max}^2$ este numit uneori *factor de merit*. Se poate observa imediat că factorul de merit reprezintă efectiv densitatca de energie maximă în dielectric, deoarece factorul de merit poate fi exprimat simplu ca o energie maximă,

$$\frac{\varepsilon E_{\max}^2}{2} = \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}_{\max}}{2} = \frac{CV_{\max}^2}{2v}. \qquad (3.124)$$

3.13.3 Unghiul de pierderi

Acest parametru este în relaţie directă cu pierderile de energie în dielectric. Aceste pierderi apar când câmpul electric este variabil în timp. În condiţiile unei variaţii sinusoidale de forma $E = E_m \sin \omega t$, în care E reprezintă valoarea instantanee, E_m valoarea maximă şi $\omega = 2\pi/T = 2\pi f$ reprezintă pulsaţia în funcţie de perioada T sau de frecvenţa f a câmpului, inducţia electrică $\vec{D}$ urmăreşte cu întârziere variaţia câmpului, şi astfel, $D = \varepsilon E_m \sin(\omega t - \delta)$. Acest fenomen de histerezis dielectric este ineluctabil

în cazul dielectricilor feroelectrici. Datorită acestei întârzieri, la fiecare perioadă de variaţie a câmpului, inducţia electrică descrie, în planul cartezian (E, D), un ciclu de histerezis a cărui suprafaţă este proporţională cu densitatea volumică de energie disipată sub formă de căldură în timpul fiecărui ciclu. Calculul puterii disipate în unitatea de volum din dielectric conduce la relaţia

$$\frac{dP}{dv} = \pi \epsilon E_m^2 f tg\delta \tag{3.125}$$

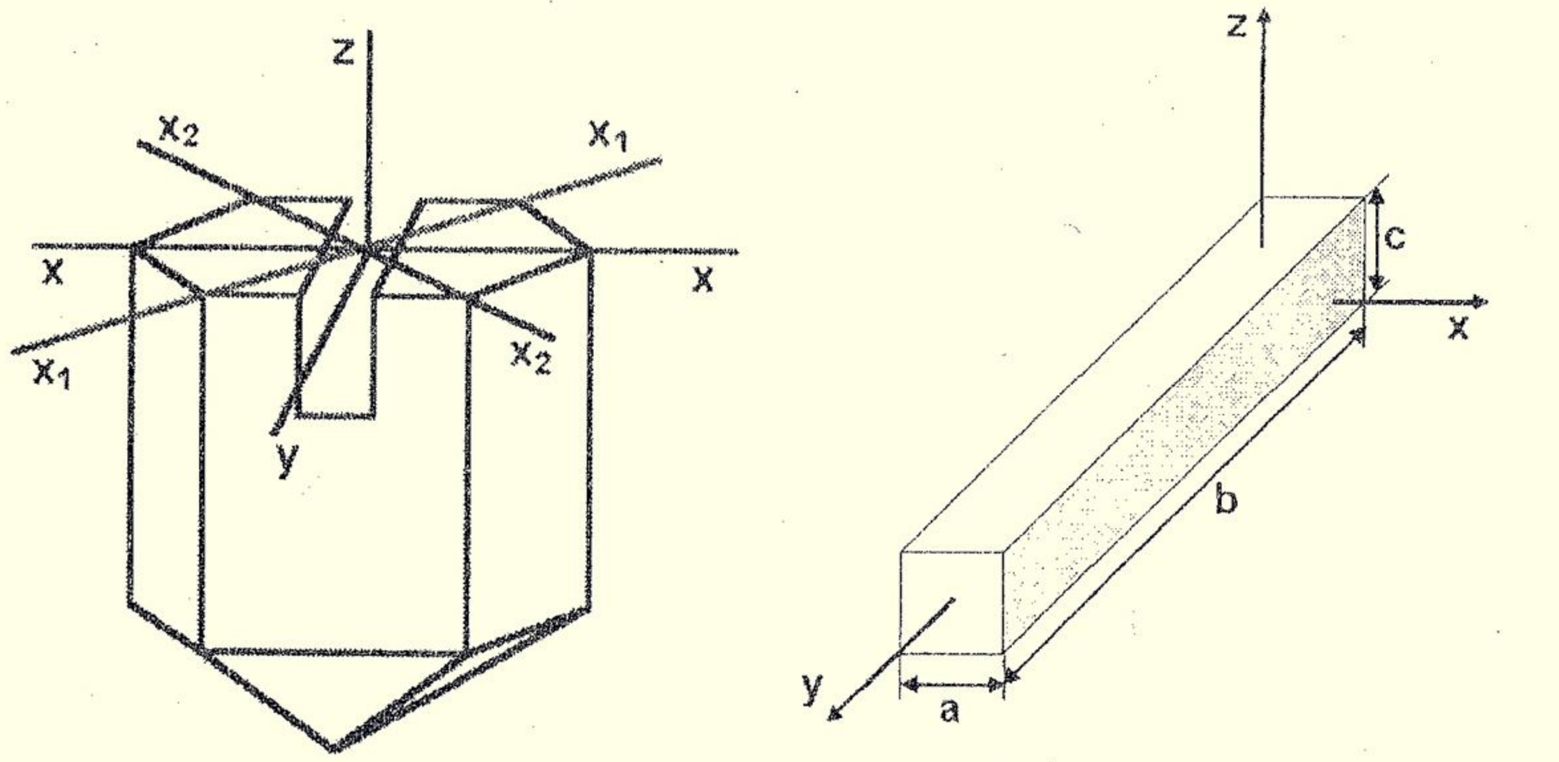
în care, în cazul pierderilor mici, $tg\delta \approx \delta$ reprezintă unghiul de pierderi. Acesta depinde adesea sensibil de frecvenţă. În dielectrici moderni cu pierderi foarte slabe, factorul de merit este de ordinul 1 până la 10 J/dm^3. Din punct de vedere al pierderilor, dielectricii se împart în două mari categori:

a) dielectrici aproape perfecţi, pentru care unghiul de pierderi este practic nul. Din această categorie menţionăm gazele constituite din molecule nepolare, la presiuni nu prea mari, (oricum mai mici de 10 atmosfere) dintre care hexaflorura de sulf este remarcabilă.

b) dielectrici cu pierderi; aceştia sunt, în cea mai mare parte, dielectrici lichizi şi solizi constituiţi din molecule polare. În tabelul alăturat dăm valorile rigidităţii, permitivităţii şi ale unghiului de pierderi pentru o serie de dielectrici

3.14 Fenomene piezoelectrice

Pe anumite suprafeţe ale unui cristal dielectric pot să apară sarcini electrice când cristalul este supus unei deformări mecanice, de exemplu prin comprimare sau prin întindere. Acest fenomen, numit **efect piezoelectric**, a fost pus în evidenţă la *cristale de cuarţ, turmalină, sare Seignette, titanat de bariu* precum şi la o serie de alţi dielectrici cristalini, şi este în relaţie directă cu distribuţia spaţială regulată a ionilor în reţeaua cristalină. Primele şi cele mai detaliate investigaţii ale acestui efect au fost efectuate pe cristalele de cuarţ. Cristalul de cuarţ, (Fig. 3.19(a)), are o axă de simetrie de ordinul trei (axa Z, care se numeşte axa optică), şi trei axe perpendiculare pe aceasta, axe de simetrie de ordinul doi, care formează între ele unghiuri de 120° (axele electrice XX, X_1X_1, X_2X_2). Dacă din acest cristal se decupează o lamă paralelipipedică, în maniera indicată în (Fig. 3.19(a)) (secţiune Curie sau secţiune-χ), şi se supune unei forţe F_X aplicată în direcţia axei X, apare o sarcină electrică $+Q$ pe faţa bc situată de partea pozitivă a axei X. Pe



(a) Cristalul de cuarţ : Axe de simetrie

(b) Cristalul de cuarţ : Lamelă decupată în secţiunea-χ

Figura 3.19: Cristalul de cuarţ

faţa opusă apare simultan o sarcină negativă $-Q$. Mărimea acestei sarcini este independentă de dimensiunile lamei şi este determinată numai de forţa de întindere F_X:

$$Q_{bc} = d_{11} F_X, \tag{3.126}$$

unde d_{11} este numit *modul piezoelectric*. Dacă se înlocuieşte forţa de întindere cu o forţă de comprimare semnul sarcinilor se inversează. Pe celelalte feţe ale lamei paralelipipedice nu apar sarcini electrice. Dacă lama este tensionată sau comprimată în direcţia axei Y, pe faţa bc apar sarcini electrice a căror mărime depinde de raportul suprafeţelor bc, pe care apar sarcini, şi ac, pe care se exercită forţa, anume:

$$Q_{bc} = d_{11} \frac{bc}{ac} F_y \tag{3.127}$$

Pe celelelte feţe nu apar sarcini. Efectul piezoelectric este mai puternic la sarea de Seignette decât la cristalul de cuarţ. Existenţa acestui efect poate fi demonstrată utilizând o instalaţie simplă, a cărei schemă este dată în (Fig. 3.20): O lamă de sare Seignette este prinsă între două foiţe de cupru care sunt conectate la o mică lampă cu neon utilizată ca indicator; când tensiunea dintre electrozii de cupru atinge câteva zeci de volţi lampa luminează. Dacă se loveşte cu un ciocănel de răşină faţa ac a lamei, pe feţele comprimate aflate în contact cu foiţele de cupru apar sarcini de semn contrar şi astfel, la fiecare lovitură, lampa va indica un scurt puls de lumină. Comprimarea sau

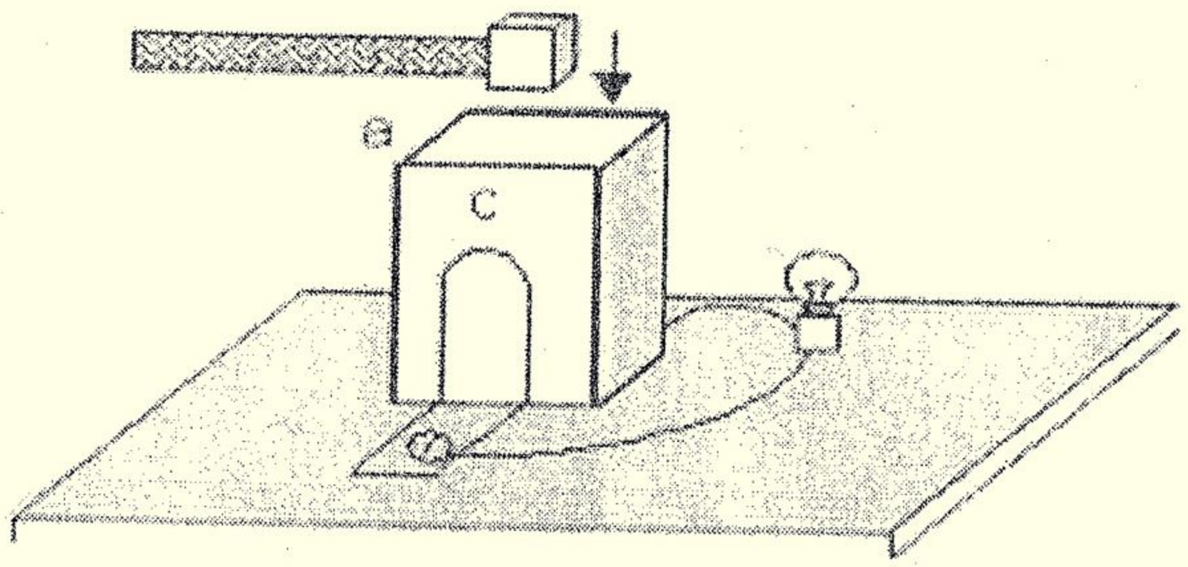


Figura 3.20: Instalaţie pentru demonstraţia efectului piezoelectric

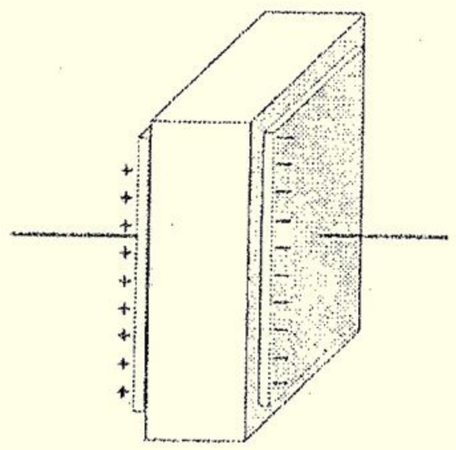


Figura 3.21: Evidenţierea efectului de electrostricţiune

intinderea lamei în lungul axei Z nu provoacă apariţia de sarcini electrice pe niciuna dintre feţele lamei. Există şi un efect piezoelectric invers care constă în variaţia dimensiunilor cristalului sub acţiunea câmpului electric. Acest efect este numit **electrostricţiune**. Dacă lama tăiată din cristalul de cuarţ în secţiunea -χ, (Fig. 3.19(b)), este situată în câmpul electric al unui condensator (Fig. 3.21), ea se va deforma. Dacă direcţia câmpului electric coincide cu direcţia axei X, lama se dilată în lungul acestei axe. Alungirea relativă în lungul axei X, în cazul considerat aici, este definită prin raportul

$$\frac{\delta e}{e} = d_{11} E \tag{3.128}$$

în care $E = U/e$ reprezintă câmpul electric dintre armăturuile condensatorului. Efectul piezoelectric direct şi cel invers a căpătat numeroase aplicaţii tehnice, ca sensori de presiune în manometrele piezoelectrice, care permit înregistrarea variaţiilor rapide de presiune în funcţie de variaţia sarcinii electrice provocate pe lama de cuarţ. Efectul piezoelectric invers este aplicat în dispozitive de generare a undelor ultrasonore. În aceste dispozitive se folo-

sesc adesea lame de cuarţ sau lame de titanat de bariu. Aceste lame, situate în câmpul electric al unui condensator plasat în medii lichide, gazoase sau în solide, se deformează, vibrând concomitent cu frecvenţa câmpului electric aplicat, produând astfel unde ultrasonore în aceste medi.

3.15 Piroelectricitate

O serie de dielectrici pot să capete o polarizaţie în cursul răcirii uniforme într-un interval de temperatură dat. Plasaţi într-un câmp electric aceştia se orientează la fel ca un dipol. Acesta este un fenomen de piroelectricitate. Turmalina este piroelectrică. Sarea Seignette prezintă această proprietate numai în intervalul de temperatură cuprins între cele două puncte Curie, -18°,+24°C. Cuarţul nu este piroelectric. În general această proprietate este întâlnită la cristalele dielectrice care au o singură axă electrică. Numai 10 din cele 32 de clase cristaline prezintă o singură axă polară. Piroelectricitatea este explicată admiţându-se că în lungul acestei axe preexistă o polarizaţie permanentă care însă nu poate fi evidenţiată direct; aceasta deoarece sarcinile de polarizare sunt practic neutralizate, fie printr-un aport de ioni din aerul înconjurător, fie datorită unei eventuale conductivităţi a cristalului. Toate cristalele piroelectrice sunt şi piezoelectrice. Din acest motiv o condiţie esenţială în obţinerea piroelectricităţii este ca temperatura să fie uniformă în întregul cristal. Neuniformităţi de temperatură antrenează apariţia tensiunilor mecanice în cristale şi implicit apariţia unei polarizaţii suplimentare cauzate de efectul piezoelectric.

3.16 Triboelectricitate

Electricitatea produsă prin frecarea suprafeţelor materiale se numeşte triboelectricitate. Cunoscută încă din antichitate (Thales din Milet, secolul VII î.e.n.), ea a fost studiată mult mai târziu. O serie de observaţii relativ la triboelectricitate sunt relevante:

a) Densitatea de sarcină electrică produsă prin frecare este independentă de presiunea exercitată de corpul cu care se freacă suprafaţa şi de viteza acestuia pe suprafaţă.

b) Sarcinile produse prin frecare pot fi pozitive sau negative.

O baghetă de răşină sau de ebonită, la fel ca şi o sferă metalică fixată

pe un suport izolator, se electrizează negativ (-) când sunt frecate cu o piele de pisică. Ca şi cum, prin frecare, pielea de pisică ar lăsa electroni pe aceste materiale. Efectiv aceşti electroni pot proveni din lanţurile peptidice filamentoase ale epidermei care acoperă pielea anumitor animale; în aceste lanţuri legăturile sunt asigurate de electronii de valenţă ca în cazul legăturilor $C-C$ sau $C-N$. Dacă aceste materiale sunt frecate cu bumbac, ele nu se electrizează. Aceasta se explică prin faptul că bumbacul este constituit din cristalite legate prin forţe de tip Van der Waals.

Sticla polizată (a cărei suprafaţă este lucioasă), frecată cu o bucată de postav, se electrizează pozitiv (+); deci ea pierde electroni. Dacă suprafaţa sticlei este depolizată prin atac cu acizi, ea se electrizează negativ (-). Se explică aceasta prin faptul că acidul neutralizează bazele, deci ionii OH^- care pot ceda electroni. În general se pare că, prin frecare a două corpuri, sarcinile electrice se fixează pe corpul care are cea mai mare afinitate pentru aceste sarcini. Gheaţa, la temperaturi joase, este cea mai electropozitivă dintre toate corpurile, deoarece ea poate în acelaşi timp să piardă electroni şi să fixeze protoni provenind respectiv din ionii OH^- şi H^+. Partea superioară a norilor conţine sarcini (+) fixate probabil pe molecule de gheaţă. Curenţii de aer ascendenţi puternici pot rupe sau sfărcâma fulgii de gheaţă şi să producă de asemenea sarcini (+). Încercările de a ordona materialele într-o serie triboelectrică, în care, o substanţă din această serie, frecată cu una dintre substanţele care o urmează, să se electrizeze pozitiv, conduc la următoarea ordine care nu este decât aproximativă, deoarece starea higrometrică şi starea suprafeţei pot produce unele inversări în această listă: pielea de căprioară, pielea de iepure, sticla polizată, mica, lâna, pielea de pisică, pana, mătasea, bumbacul, lemnul, răşina, metalele $(Cu, Ni, Co, Ag...)$ zahărul, sticla depolizată, celuloidul.

Electrizarea a două metale diferite, puse în contact şi apoi desprinse, este un fenomen diferit de cele prezentate aici, deoarece diferenţa de potenţial care se obţine fără frecare rezultă din faptul că lucrul de ieşire a electronilor este diferit la cele două metale.

O baghetă de sticlă încărcată pozitiv pusă în contact cu un metal poate să-l încarce pozitiv; ca şi cum o parte dintre electroni ar fi extraşi din metal. La temperatura ambiantă ar fi necesar un câmp de ordinul 10^9–$10^{10} V/m$ pentru a extrage un electron din metal. Efectiv aceasta este posibil deoarece câmpul unei sarcini elementare la o distanţă de 2-3 angströmi poate să atingă acest ordin de mărime.

	Rigiditatea dilectrică $(kV-m)$	Permitivitatea relativă ε_r	Unghiul de pierderi $tg\delta$
Aer la presiune atmosferică	30	$1,0006$	0
Ebonita	500	$2,73$	$3,8.10^{-3}$
Mica	600	$5,5-9$	$1,6.10^{-3}$
Cuarţ	125	$3,5-4,1$	8.10^{-4}
Sticla	160	$4-7$	$(2-18).10^{-3}$
Titanat de bariu (ceramic)	40	2.10^3-10^4	10^{-2}
Teflon (tetrafluoro-etilen)	800	2	2.10^{-4}
Nylon		$3,5$	$(3-4).10^{-2}$
Ulei de transformator	250	$2,1$	$(1-4).10^{-4}$
Hexafluorură $(1atm)$	100		0
de sulf $(2atm)$	200		
Apa (^oC)		88	
(100^oC)		55	

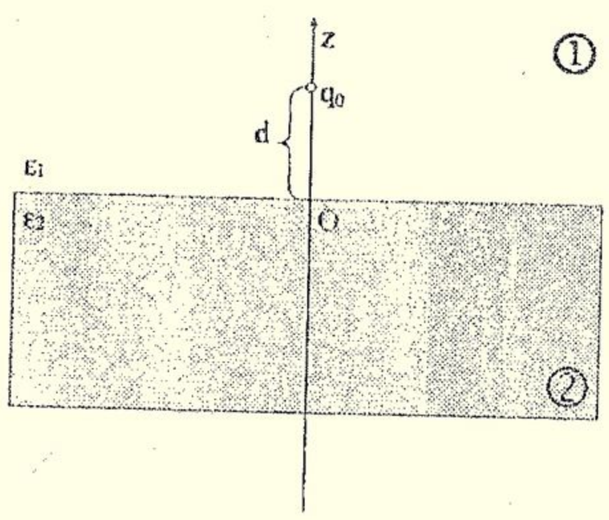
Aplicaţii. Probleme

1. (Metoda imaginilor în cazul dielectricilor) Să se calculeze forţa care acţionează asupra unei sarcini electrice q_0 care se află la distanţa d de suprafaţa de separaţie plană între două medii dielectrice caracterizate de permitivităţile electrice absolute ε_1 şi ε_2.

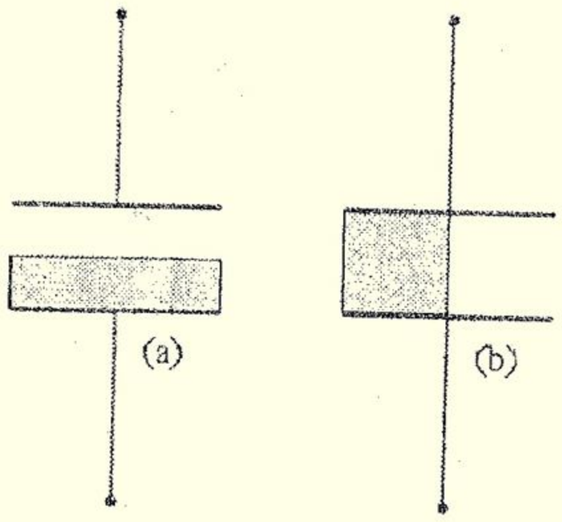
2. Spatiul dintre placile unui condensator plan poate fi ocupat de un dielectric. Dacă avem la dispoziţie o cantitate de dielectric care reprezintă doar jumătate din volumul spaţiului dintre plăcile condensatorului putem imagina mai multe variante de folosire a dielectricului pentru a ocupa spaţiul dintre plăcile conductoare. In figură sunt două dintre acestea. În care situaţie capacitatea condensatorului este mai mare ?

Propuneţi şi alte variante, calculaţi capacitatea şi comparaţi cu cea obţinută anterior.

3. Calculaţi câmpul electric creat de o sferă dielectrică uniform polarizată într-un punct oarecare în exteriorul acesteia.



(a) Problema 1



(b) Problema 2

Răspunsuri

1. Sarcina q_0 crează un câmp electric în tot spaţiul ceea ce produce o polarizare a acestuia. Câmpul creat de sarcinile de polarizare se poate calcula simplu prin folosirea a două sarcini imagine: q'_0 şi q''_0. Câmpul în zona 1 a spaţiului se poate calcula considerând că există sarcinile q_0 şi q'_0 iar tot mediul are permitivitate ε_1. În zona 2 câmpul este dat de sarcina q''_0 iar întreg spaţiul este ocupat de mediul de permitivitate ε_2. Punând condiţiile de trecere pentru componentele câmpului electric obţinem:

$$E_{1t} = E_{2t} \Rightarrow \frac{q_0 \cos\alpha}{4\pi\varepsilon_1 R^2} + \frac{q'_0 \cos\alpha}{4\pi\varepsilon_1 R^2} = \frac{q''_0 \cos\alpha}{4\pi\varepsilon_2 R^2}$$

$$\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n} \Rightarrow \varepsilon_1 \left(-\frac{q_0 \sin\alpha}{4\pi\varepsilon_1 R^2} + \frac{q'_0 \sin\alpha}{4\pi\varepsilon_1 R^2} \right) = \varepsilon_2 \left(-\frac{q''_0 \sin\alpha}{4\pi\varepsilon_2 R^2} \right)$$

Din sistemul de ecuaţii obţinut astfel se obţin valorile sarcinilor imagine:

$$\begin{cases} \varepsilon_2 (q_0 + q'_0) = \varepsilon_1 q''_0 \\ (-q_0 + q'_0) = (-q''_0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} q'_0 = q_0 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \\ q''_0 = q_0 \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \end{cases}$$

Asupra sarcinii q_0 va acţiona forţa:

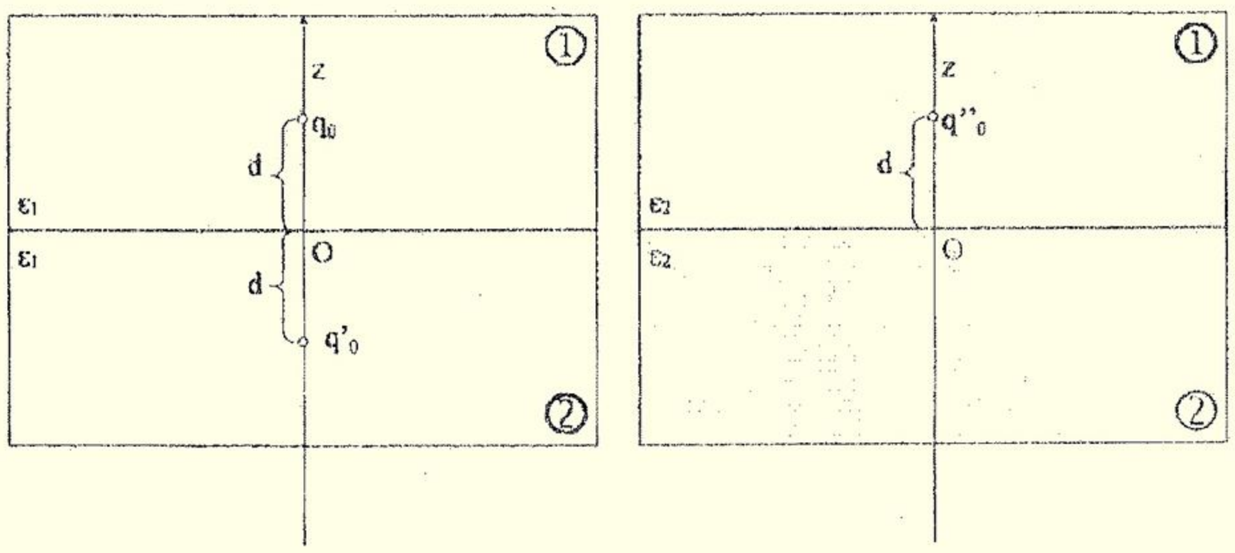
$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_1} \frac{q_0 q'_0}{(2d)^2}$$

2.

$$C_a = C_0 \frac{\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}}{2}; C_b = C_0 \frac{2\varepsilon_{r1}\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}}$$

$$\frac{C_a}{C_b} = \frac{(\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2})^2}{4\varepsilon_{r1}\varepsilon_{r2}} = 1 + \frac{(\varepsilon_{r1} - \varepsilon_{r2})^2}{4\varepsilon_{r1}\varepsilon_{r2}}$$

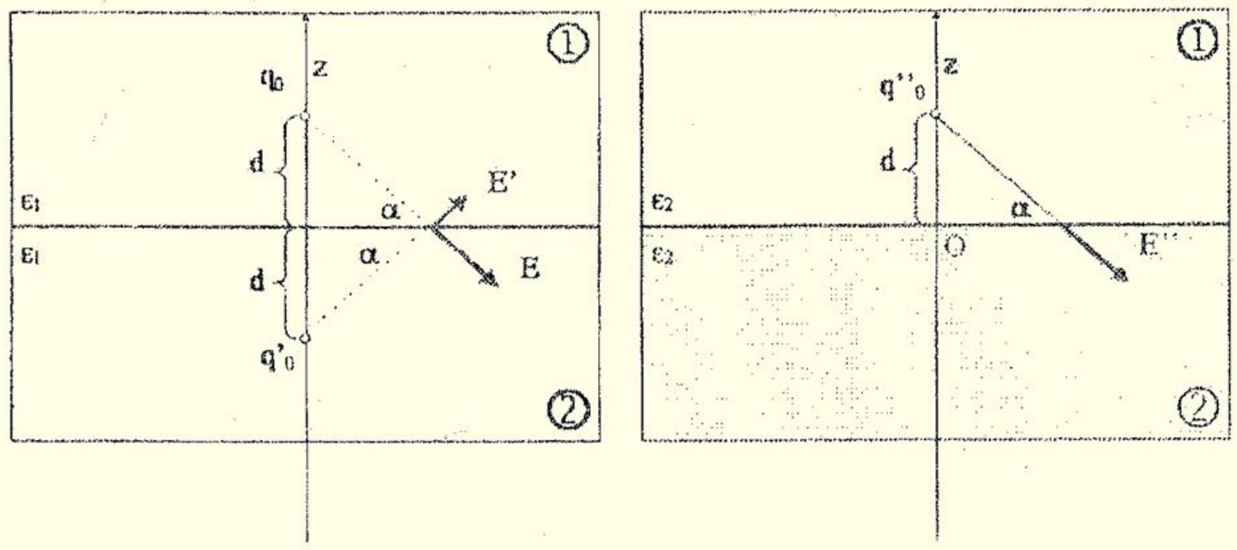
3. Câmpul este dipolar. Momentul de dipol al sferei este egal cu polarizaţia inmulţită cu volumul acesteia.



(c) Sarcinile care creează câmp în zona 1

(d) Sarcinile care creează câmp în zona 2

Figura 3.22: Rezolvare problema 1. Sarcinile imagine



(a) Câmpul la suprafaţa de separaţie, în zona 1

(b) Câmpul la suprafaţa de separaţie, în zona 2

Figura 3.23: Rezolvare problema 1. Condiţiile la limită

ectric

Capitolul 4

Energia electrostatică. Relaţii între energie, forţe şi cupluri

4.1 Energia electrostatică a unei sarcini punctiforme situate în câmpul electric.

În Capitolul 1, am evaluat *lucrul efectuat de forţa electrostatică* $\vec{F}$ pentru a deplasa o sarcină electrică punctiformă q pe un drum oarecare între două puncte A şi B, (Fig. 4.1). Lucrul elementar $d\tau$ efectuat pentru o deplasare infinitezimală $\vec{dl}$ fiind

$$d\tau = \vec{F} \cdot \vec{dl} = q\vec{E} \cdot \vec{dl} = -qgradV \cdot \vec{dl} = -qdV, \tag{4.1}$$

s-a determinat că, pentru o deplasare finită a sarcinii q de la punctul A la punctul B, în care potenţialele electrostatice sunt V_A, respectiv V_B, lucrul total $\tau = \int_A^B \vec{F} \cdot \vec{dl}$ nu depinde de forma drumului parcurs ci numai de poziţiile iniţială şi finală ale sarcinii. Astfel forţa electrostatică efectuează lucrul:

$$\tau = -q\left(V_B - V_A\right) \tag{4.2}$$

Dar, dacă acţionează numai forţa electrostatică, sarcina ar trebui să se pună în mişcare accelerată şi astfel nu mai avem de a face cu o sarcină statică (în repaus). Pentru ca sarcina să fie în repaus trebuie să presupunem că ea este supusă în acelaşi timp unei forţe exterioare $\vec{F}_{ext}$, care poate fi de origine mecanică, egală şi opusă forţei electrostatice $\vec{F}$.

$$\vec{F}_{ext} = -\vec{F} \tag{4.3}$$

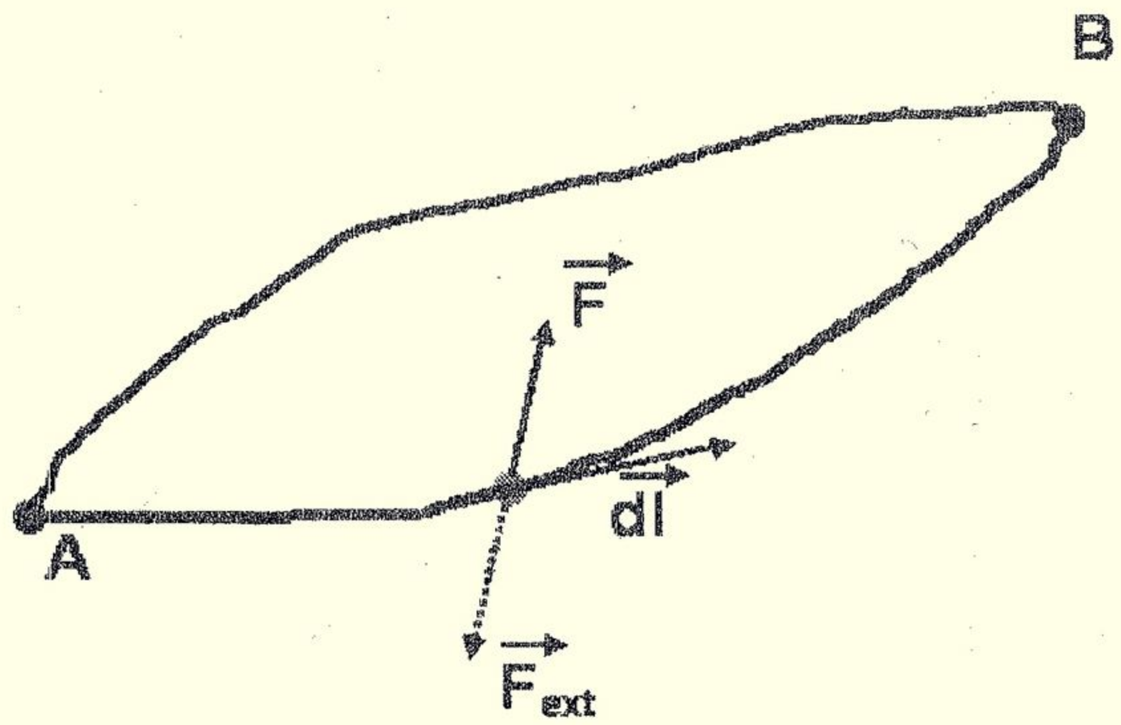


Figura 4.1: Lucrul efectuat de forţa electrostatică pentru deplasarea sarcinii q între punctele A şi B

În aceste condiţii deplasarea sarcinii între cele două puncte va trebui să fie suficient de lentă pentru ca în orice moment să se păstreze echilibrul între cele două forţe. Se înţelege astfel că *lucrul efectuat de forţa exterioară în cursul deplasării sarcinii q de la A la B este egal şi opus lucrului forţei electrostatice*:

$$\tau_{ext} = \int_A^B \vec{F}_{ext} \cdot \overrightarrow{dl} = -\int_A^B \vec{F} \cdot \overrightarrow{dl} = q\,(V_B - V_A) \tag{4.4}$$

Acest lucru τ_{ext} a fost furnizat sarcinii q pentru ca, în cursul deplasării sale, forţa electrostatică să nu-i poată imprima o mişcare accelerată. Deplasarea fiind presupusă suficient de lentă pentru ca sarcina să poată fi considerată în echilibru static, se poate admite că, în sistem, n-a fost introdusă din exterior nici o altă formă de energie în afară de cea corespunzătoare lucrului τ_{ext}. Conform principiului conservării energiei, această energie, furnizată sarcinii pentru ca ea să rămână în orice moment în echilibru static, se regăseşte în sistem sub forma unei alte energii pe care o vom numi *energie electrostatică*. Aceasta este efectiv o *energie potenţială* a sarcinii, şi o vom nota cu W. În cursul deplasării sarcinii pe distanţa $\overrightarrow{dl}$ această energie variază cu dW, şi deci, pe întregul parcurs de la A la B, energia electrostatică a variat cu o cantitate egală cu lucrul forţei exterioare:

$$\tau_{ext} = \int_A^B dW = W_B - W_A \tag{4.5}$$

În consecinţă, în virtutea relaţiei (5.4) se poate scrie că

$$W_B - W_A = q\,(V_B - V_A) \tag{4.6}$$

Această formulă nu ne oferă posibilitatea de a defini fără condiţii energia electrostatică pe care o are sarcina q în câmpul electric, când această sarcină se află în punctul A sau în punctul B sau într-un punct oarecare de pe traiectoria sa, deoarece orice expresie de forma

$$W = qV + K \tag{4.7}$$

verifică formula (4.6) pentru orice valoare a constantei K. S-a văzut anterior, că, dacă sursele câmpului electric $\vec{E}$ se află la distanţă finită, suprafaţa echipotenţială de origine, $(V = 0)$, se consideră la infinit. În această situaţie, expresia (4.7) dă, pentru energia sarcinii q la infinit, valoarea $W = K$. Se consideră *prin convenţie* valoarea $K = 0$, fapt care este echivalent cu a considera ca *origine* $W = 0$ (pe scara valorilor energiei electrostatice), *energia sarcinii q la infinit.* În consecinţă expresia energiei electrostatice a unei sarcini izolate se scrie:

$$W = qV \tag{4.8}$$

În sistemul internaţional de unităţi, în care sarcina se măsoară în coulombi şi potenţialul în volţi, energia electrostatică se măsoară în jouli. Conform relaţiei de definiţie (4.8), $1 joule = 1 coulomb \times 1 volt$. La scara atomică, sarcina electronului fiind $q = e = 1,6.10^{-19}$, energia exprimată în jouli capătă valori foarte mici. De aceea, la această scară, este convenabil să se măsoare energia în unităţi mai mici: de exemplu energia electrostatică a unui electron aflat la potenţialul de un volt. Această unitate se numeşte *electron-volt* (simbolul eV): $1eV = 1,6.10^{-19}$ jouli.

Remarcă:

1. Regăsim în formula (4.8) semnificaţia fizică dată potenţialului electrostatic într-un punct dat, ca fiind o mărime numeric egală cu lucrul efectuat de forţele exterioare pentru a aduce sarcina unitară $(q = 1)$ de la infinit în punctul considerat.

2. Energia electrostatică este esenţialmente o *energie de natură potenţială* pe care o posedă sarcina după ce a fost adusă de la infinit într-un punct dat. Situaţia este comparabilă cu cea a energiei potenţiale a unei particule de masă m care, aflată în câmpul gravitaţional, este ridicată de o forţă exterioară pe o traiectorie oarecare de la nivelul solului, luat ca origine $(h = 0)$, la

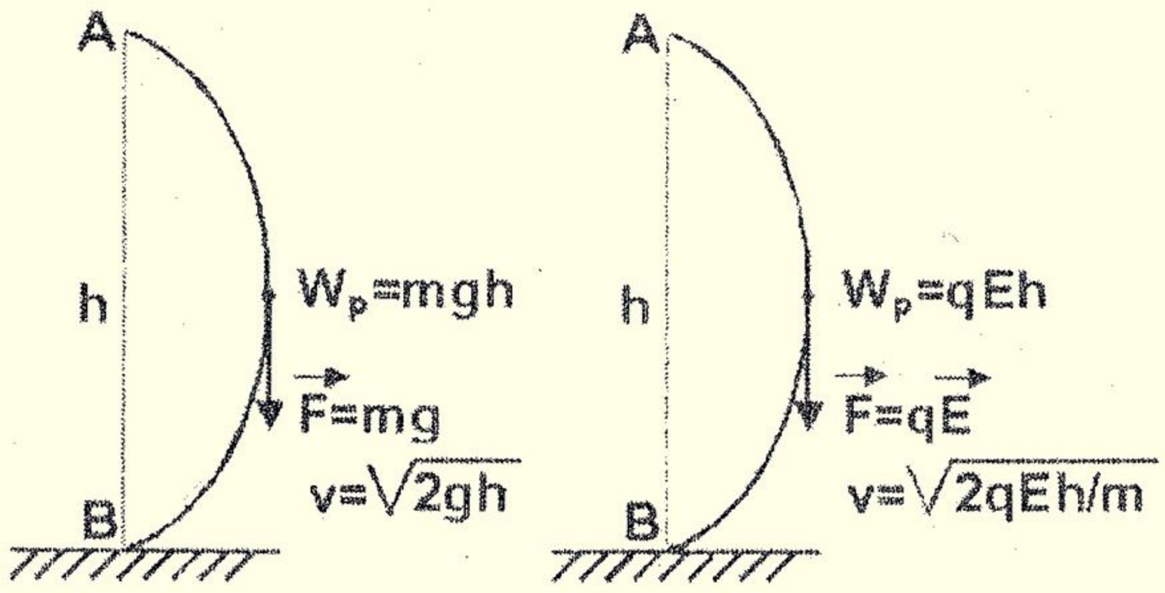


Figura 4.2: Comparaţie între energia potenţială a unei particule de masa m în câmpul gravitaţional $\vec{g}$ şi energia unei sarcini q în câmpul electrostatic $\vec{E}$

o înălţime h dată (Fig. 4.2). În acest mod particula are o energie potenţială a cărei valoare este $W_p = mgh$, unde g, acceleraţia gravitaţională, reprezintă efectiv câmpul gravitaţional (forţa gravitaţională exercitată asupra unităţii de masă). În acelaşi mod, o sarcină electrică q adusă de forţe exterioare la acecaşi înălţime h, considerată în raport cu suprafaţa Pământului care este o echipotenţială nulă ($V = 0$), are o energie electrostatică $W = qV = qEh$. Aici, câmpului electric E îi corespunde câmpul gravific g iar sarcinii electrice q îi corespunde masa mecanică m. Când s-a înlăturat forţa exterioară, particula, rămasă numai sub influenţa forţei gravifice, se deplasează către sol, energia sa potenţială transformându-se în energie cinetică: $mgh = (mv^2)/2$, viteza particulei în cădere fiind $v = \sqrt{2gh}$. În mod asemănător, sarcina eliberată de forţa exterioară, rămâne numai sub influenţa forţei electrostatice $F = qE$ care o va transporta către sol pe un drum oarecare iar energia sa electrostatică se transformă în energie cinetică: $qEh = (mv^2)/2$, viteza fiind $v = \sqrt{2qEh/m}$. Această transformare a energiei electrostatice în energie cinetică va fi interesantă când vom studia fenomenele electrocinetice în care sarcina se află în mişcare.

4.2 Energia electrostatică a unui sistem de sarcini discrete situate în câmpul electric.

1. Să evaluăm mai întâi *energia de interacţiune electrostatică* a două sarcini punctiforme, Q_1 şi Q_2 situate la distanţa R ($R = R_{12} = R_{21}$, vezi Fig. 4.3). Sarcina Q_1, se află pe suprafaţa echipotenţială V_{21} a sarcinii vecine Q_2 la

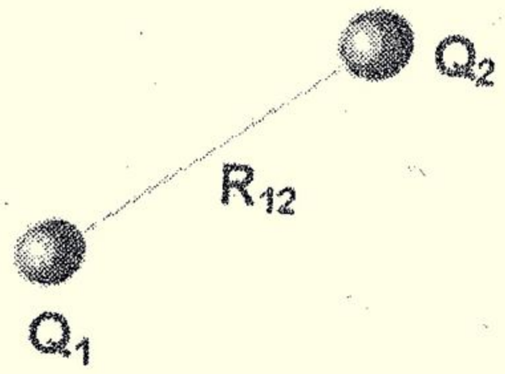


Figura 4.3: Energia de interacţiune electrostatică a două sarcini punctiforme: Q_1 în câmpul sarcinii Q_2 şi Q_2 în câmpul sarcinii Q_1

distanţa R_{21}, respectiv $V_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2}{R_{21}}$. Energia electrostatică de interacţiune este evident

$$W_1 = Q_1 V_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{R}, \tag{4.9}$$

În acelaşi mod, se poate considera sarcina Q_2 ca fiind situată pe suprafaţa echipotenţială $V_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1}{R_{12}}$ a sarcinii Q_1, la aceeaşi distanţă $R = R_{12}$. Energia de interacţiune este deci

$$W_2 = Q_2 V_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2 Q_1}{R} \tag{4.10}$$

În ambele cazuri regăsim aceeaşi expresie a energiei de interacţiune, $W_1 = W_2 = W$. Reciprocitatea acestor interacţiuni ne permite să formulăm o expresie mai simetrică pentru energia de interacţiune, în care ambele sarcini Q_1 şi Q_2 să joace acelaşi rol:

$$W = \frac{1}{2}\left(Q_1 V_{21} + Q_2 V_{12}\right) \tag{4.11}$$

Pentru a sugera o idee asupra ordinului de mărime al energiei de interacţiune electrostatică, se poate aprecia în virtutea celor spuse mai sus că, în sistemele electrostatice macroscopice, la scara experimentelor de laborator, unde mărimea sarcinilor este de ordinul 10^{-6} coulombi, energia de interacţiune între două astfel de sarcini, aflate la distanţa de 1 m, este de ordinul $9.10^9 \cdot 10^{-12} \approx 9.10^{-3}$ jouli. La scara atomică energia de interacţiune este mult mai mare. Se poate estima de exemplu că într-un atom de hidrogen, în care sarcinile în interacţiune, electron-proton, au mărimea sarcinii electronului $(1,6.10^{-19}C)$ iar distanţa medie dintre electron şi proton este de ordinul

$0,5.10^{-10}m$, valoarea energiei de interacţiune electrostatică dată de relaţia (5.9) este de ordinul $9.10^9 \cdot (1,6.10^{-19})^2 \cdot 2 \cdot 10^{10} \approx 4,6 \cdot 10^{-18}J \approx 28eV$. Un gram de hidrogen atomic conţine $N_A = 6.10^{23}$ atomi înglobând o energie de interacţiune electrostatică de ordinul $2,7.10^6$ jouli !

2. *Energia electrostatică de interacţiune a unui ansamblu de sarcini punctiforme.* Expresia (4.11) poate fi generalizată în aceeaşi manieră pentru un sistem constituit din N de sarcini discrete, $Q_1, Q_2, Q_3....Q_N$. Oricare dintre aceste sarcini Q_i, localizată într-un punct dat P_i, se află la potenţialul V_i creat în acel punct de toate celelalte sarcini ale sistemului. În virtutea legii de aditivitate a potenţialelor, potenţialul în punctul P_i este egal cu suma potenţialelor sarcinilor Q_j înconjurătoare:

$$V_i = \sum_{j=1\ (j\neq i)}^{N} V_{ji} \tag{4.12}$$

Energia W_i a sarcinii Q_i izolate, aflate la potenţialul V_i, este egală cu

$$W_i = Q_i V_i \tag{4.13}$$

ţinând seama de simetria interacţiunilor dintre sarcini, *expresia energiei electrostatice W de interacţiune între toate cele N sarcini este*:

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} Wi \tag{4.14}$$

În virtutea formulelor (5.11) şi (5.12) această energie W poate fi scrisă în definitiv sub una dintre formele următoare:

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1\ (i\neq j)}^{N}\sum_{j=1}^{N} Q_i V_{ji} \tag{4.15}$$

sau

$$W = \frac{1}{2}\sum\nolimits_{i=1}^{N} Q_i V_i. \tag{4.16}$$

4.3 Energia electrostatică a unei distribuţii continue de sarcină situată în câmpul electric

1) *Distribuţie volumică de sarcină.* Considerăm o distribuţie continuă de sarcini ocupând volumul v. Dacă sarcina ΔQ, conţinută într-un mic volum

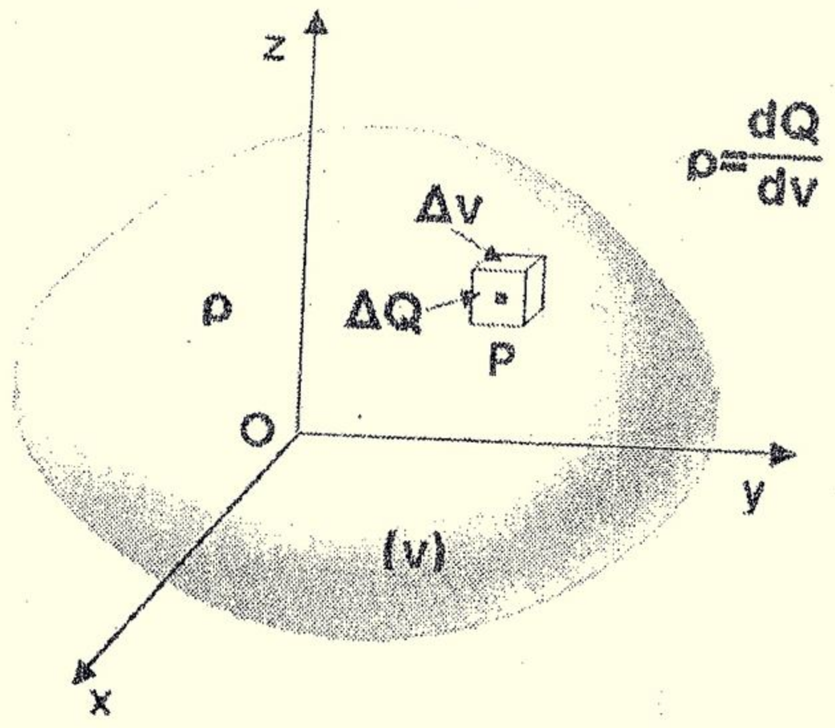


Figura 4.4: Schemă pentru evaluarea energia unei distribuţii volumice de sarcină de densitate ρ

Δv centrat în jurul unui punct P (Fig. 4.4), se repartizează uniform, densitatea volumică de sarcină, $\rho = \Delta Q/\Delta v$, este constantă. Această situaţie este efectiv reală în condiţiile limită în care Δv devine un volum infinitezimal dv, "aproape punctiform" şi, la rândul ei, sarcina dQ este practic o sarcină punctiformă. În acest context energia electrostatică a întregii distribuţii volumice de sarcină poate fi evaluată după formula (4.16). Notând cu V potenţialul în punctul P al tuturor sarcinilor din jurul unei sarcini dQ şi sumând sau integrând pentru întreaga distribuţie de sarcini $dQ = \rho dv$ repartizate în volumul v, se obţine următoarea expresie pentru *energia electrostatică a unei distribuţii volumice de sarcină*

$$W = \frac{1}{2}\int_v \rho V\, dv. \tag{4.17}$$

2) *Distribuţie superficială de sarcină.* În cazul sarcinilor distribuite continuu pe o suprafaţă S (Fig. 4.5), energia electrostatică se determină în aceeaşi manieră ca în cazul distribuţiilor volumice: Fiind dată densitatea superficială de sarcină σ, se defineşte mai întâi sarcina $dQ = \sigma dS$ repartizată pe o suprafaţă infinitezimală dS centrată în jurul unui punct P de pe suprafaţa S. Energia de interacţiune electrostatică a acestei sarcini dQ cu toate celelalte sarcini ale distribuţiei care creează în punctul P potenţialul V, este $dW = \frac{1}{2}V dQ$. Integrând această expresie pentru toată sarcina de pe suprafaţa S se obţine *expresia energiei electrostatice a întregii distribuţii*

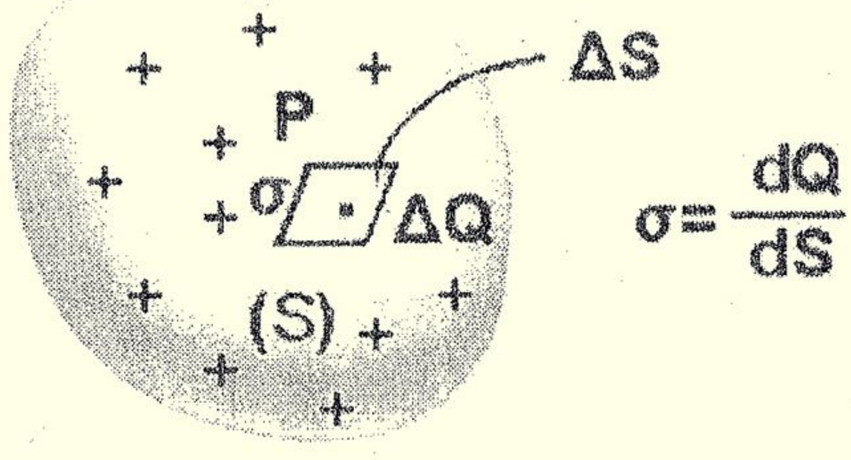


Figura 4.5: Pentru evaluarea energiei electrostatice a unei distribuţii superficiale de sarcină

superficiale

$$W = \frac{1}{2}\int_S \sigma V dS. \tag{4.18}$$

Exemple de aplicaţii

a) *Calculul energiei electrostatice a unei sarcini Q distribuite uniform în volumul unei sfere de rază a.* Utilizăm formula (4.17) în care densitatea volumică este $\rho = \frac{Q}{v} = \frac{Q}{(4\pi/3)a^3}$ iar potenţialul V este cel deja calculat în Capitolul 2, pentru toate punctele aflate în interiorul sferei la distanţa r între limitele $0 \leq r \leq a$. În aceste condiţii formula (4.17) devine

$$W = \frac{1}{2}\int_v \rho V dv = \frac{1}{2}\frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{2a}\int_0^a \left(3 - \frac{r^2}{a^2}\right) 4\pi r^2 dr,$$

şi, după integrare, se obţine *expresia energiei electrostatice a distribuţiei volumice sferice*:

$$W = \frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0 a} \tag{4.19}$$

b) *Calculul energiei electrostatice a sarcinii Q distribuită uniform pe suprafaţa unei sfere de rază a.* Fiind date densitatea superficială $\sigma = \frac{Q}{4\pi a^2}$ şi potenţialul V în orice punct de pe suprafaţa sferei (cel calculat în Capitolul 2 pentru $r = a$), după înlocuirea lor în formula (4.18) obţinem expresia:

$$W = \frac{1}{2}\int_S \sigma V dS = \frac{1}{2}\frac{Q}{4\pi a^2}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}\int_S dS$$

După integrare găsim *expresia energiei electrostatice a sarcinii superficiale sferice Q de rază a*:

$$W = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}. \tag{4.20}$$

Evaluarea energiei electrostatice a distribuţiei superficiale de sarcină, în condiţiile unei micşorări continue a suprafeţei distribuţiei superficiale sferice până la limită, $(a \to 0)$, când sarcina devine punctiformă, ar putea să sugereze ideia de *energie electrostatică a unei sarcini punctiforme*. Însă, pentru $a \to 0$, relaţia (4.20) dă o energie infinită, fapt care nu corespunde realităţii. Particulele elementare, electron proton, nu sunt în realitate sarcini punctiforme. Admiţând că sarcina particulei, $e = 1,6.10^{-19}C$ este distribuită uniform pe o suprafaţă sferică de rază finită, a, energia electrostatică a acestei distribuţii s-ar supune relaţiei (4.20). Dar, atât a cât şi W nu sunt cunoscute. Pentru determinarea lui a s-ar putea invoca relaţia de echivalenţă a lui Einstein, între masă şi energie,

$$W = mc^2, \tag{4.21}$$

în care considerăm că $m = 9,1.10^{-31}kg$ este masa electronului în repaus şi $c = 3.10^8 m/s$ viteza luminii în vid. Din echivalenţa energiilor (4.20) şi (4.21) se estimează că

$$a = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 mc^2} \approx 10^{-15}m. \tag{4.22}$$

Acestă valoare corespunde ordinului de mărime al diametrului nucleului atomilor. Totuşi, problema rămâne deschisă deoarece ipoteza făcută aici, privind distribuţia superficială a sarcinii pe suprafaţa nucleului, nu are acoperire cu fapte experimentale. Dacă sarcina ar fi distribuită în volum, forţele repulsive dintre sarcinile din interiorul corpusculului ar fi suficient de mari pentru a-l face să explodeze.

Rămâne de lămurit o altă problemă care este mult mai interesantă în aplicaţiile practice, anume: Unde este localizată energia electrostatică a unui sistem electrostatic dat ? Un răspuns satisfăcător la această chestiune poate fi găsit imediat dacă ţinem seama de faptul că în expresia energiei atât potenţialul cât şi sarcina, ambele sunt în relaţie directă cu câmpul electric.

4.4 Localizarea energiei electrostatice

Convenim să modificăm expresia energiei electrostatice (4.17) astfel încât aceasta să conţină forma locală a câmpului electric al elementului de sarcină ρdv în acord cu formula lui Poisson. Pentru aceasta este suficient să înlocuim pe ρ cu $\varepsilon_0 div\vec{E}$:

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_v div\vec{E}V\,dv \tag{4.23}$$

Această integrală poate fi calculată relativ simplu dacă se ţine seama de relaţia vectorială,

$$div\left(V\vec{E}\right) = Vdiv\vec{E} + \left(\vec{E}\cdot gradV\right) = Vdiv\vec{E} - E^2 \qquad (4.24)$$

şi astfel expresia (5.23) devine,

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_v E^2 dv + \frac{\varepsilon_0}{2}\int_v div\left(V\vec{E}\right)dv \qquad (4.25)$$

Se poate demonstra că a doua integrală din membrul al doilea este nulă: Într-adevăr, transformând-o într-o integrală de suprafaţă

$$\int_v div\left(V\vec{E}\right)dv = \int_S V\left(\vec{E}\cdot\vec{n}\right)dS$$

observăm că, pentru o suprafaţă sferică de rază R suficient de mare pentru a cuprinde în ea întreaga distribuţia de sarcină, potenţialul V descreşte ca $1/R$, câmpul electric $\vec{E}$ descreşte ca $1/R^2$, în timp ce suprafaţa S creşte ca R^2, şi astfel integrala de suprafaţă variază ca $1/R$. În consecinţă ea este nulă când $R = \infty$.

În concluzie *energia electrostatică a distribuţiei volumice de sarcină poate fi formulată ca o funcţie de câmpul electric,*

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_v E^2 dv \qquad (4.26)$$

Se observă imediat că *densitatea volumică de energie* $w = W/v$ este o mărime care depinde exclusiv de câmpul electric:

$$w = \varepsilon_0\frac{E^2}{2} \qquad (4.27)$$

Prin urmare, *energia electrostatică este localizată în câmpul electric.* Având în vedere relaţia de definiţie a inducţiei electrice în vid, $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}$ expresiile (5.26) şi (5.27) mai pot fi scrise şi altfel:

$$W = \frac{1}{2}\int_v \left(\vec{E}\cdot\vec{D}\right)dv \qquad (4.28)$$

şi

$$w = \frac{\vec{E}\cdot\vec{D}}{2} \qquad (4.29)$$

Exemple numerice:

1. *Energia electrostatică a unei distribuţii de sarcină de densitate σ repartizată uniform pe o suprafaţă sferică de rază a,* poate fi evaluată utilizând relaţia (4.26). Se ştie că în interiorul sferei câmpul este nul. Prin urmare energia câmpului electric $\vec{E}$ al acestei distribuţii este localizată numai în volumul exterior sferei. Cu $E_{ext} = E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{a^2}{R^2}$ formula (5.26), în care $dv = 4\pi R^2 dR$, dă:

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{\sigma a}{\varepsilon_0}\right)^2 \int_a^\infty \frac{4\pi R^2}{R^4} dR = \frac{2\pi\sigma^2 a^3}{\varepsilon_0} \tag{4.30}$$

Se observă imediat că acest rezultat este, cum era de aşteptat, identic cu cel obţinut mai înainte (formula (4.20)), având în vedere faptul că $\sigma = Q/4\pi a^2$.

2. *Energia electrostatică a unei distribuţii de sarcină de densitate ρ repartizată uniform într-un volum sferic de rază a,* poate fi evaluată în mod asemănător, utilizând relaţia (4.26), ţinând seama de expresiile câmpului electric în interiorul şi în exteriorul sferei, $E_{int} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R}{a^3} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}R$ şi $E_{ext} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R^2}$. Cu $\rho = 3Q/4\pi a^3$ şi $dv = 4\pi R^2 dR$, această formulă dă energia totală sub forma:

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\frac{Q^2}{(4\pi\varepsilon_0)^2}\left[\frac{1}{a^6}\int_0^a R^2 4\pi R^2 dR + \int_a^\infty \frac{1}{R^4} 4\pi R^2 dR\right] = \frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0 a} \tag{4.31}$$

Regăsim astfel expresia deja calculată în (4.19).

4.5 Energia electrostatică a unui sistem de conductori în echilibru electrostatic

Distribuţiile de sarcină în cazul conductorilor fiind în exclusivitate superficiale, energia unui sistem de conductori încărcaţi, aflaţi la echilibrul electrostatic este stocată numai în câmpul electric distribuit în spaţiul exterior conductorilor; aceasta, deoarece în interiorul lor câmpul este nul. În particular, în cazul a doi conductori aflaţi în influenţă totală, energia este localizată în exclusivitate în spaţiul dintre aceştia. Problema evaluării energiei electrostatice a acestui sistem devine interesantă din punct de vedere practic deoarece se intrevede o posibilitate de a defini energia electrostatică înmagazinată într-un condensator.

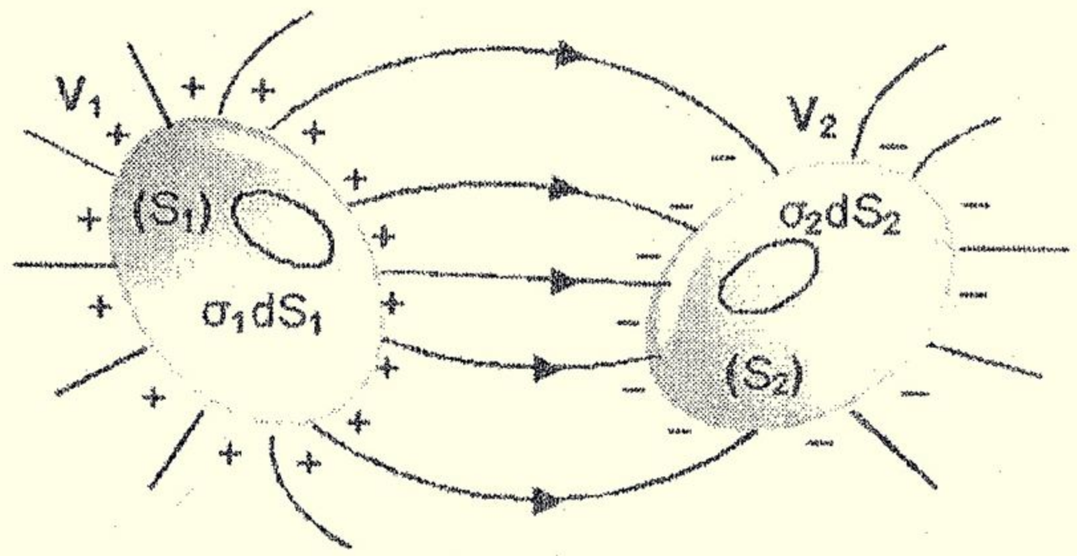


Figura 4.6: Schemă pentru calculul energiei electrostatice a doi conductori în echilibru electrostatic

Să considerăm un sistem de N conductori aflaţi la potenţialele V_1, V_2, V_3,...V_N. Sarcinile distribuite pe aceşti conductori la echilibrul electrostatic având densităţile σ_1, σ_2, σ_3,...σ_N, energia electrostatică a sistemului poate fi evaluată în aceeaşi manieră ca în cazul unui sistem de sarcini discrete, utilizând formula (4.16) în care sacina totală a unui conductor oarecare i este definită de integrala $Q_i = \int_{S_i} \sigma_i dS_i$:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \int_{S_i} \sigma_i V_i dS_i \tag{4.32}$$

În particular expresia energiei electrostatice a doi conductori (Fig. 4.6) poate fi scrisă sub forma următoare, în care potenţialele au fost scoase de sub semnul integralei deoarece ele sunt constante, (suprafeţele conductorilor fiind totdeauna echipotenţiale):

$$W = \frac{1}{2} \left(V_1 \int_{S_1} \sigma_1 dS_1 + V_2 \int_{S_2} \sigma_2 dS_2 \right) = \frac{1}{2} \left(Q_1 V_1 + Q_2 V_2 \right). \tag{4.33}$$

În cazul general a N conductori energia se scrie într-o formă similară cu (4.16), adică

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} Q_i V_i. \tag{4.34}$$

Deşi cele două formule sunt identice, ele nu exprimă aceeaşi mărime fizică. În cazul sarcinilor punctiforme (4.16) exprimă doar *energia de interacţiune* dintre sarcini în timp ce (4.34) este *energia totală* a sistemului. Dacă în cazul sarcinilor punctiforme s-ar face calculul energiei totale acesta

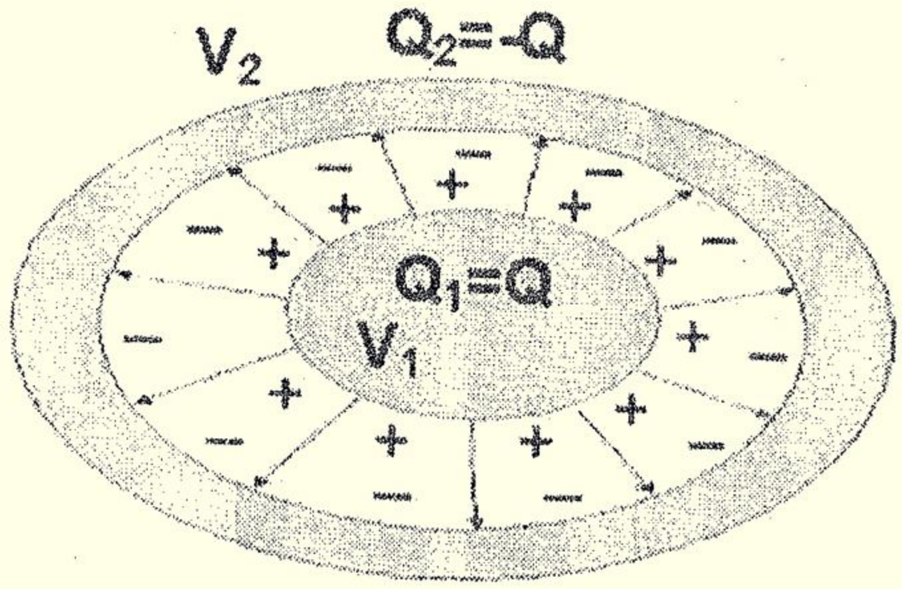


Figura 4.7: Energia localizată în câmpul a doi conductori în condiţia de influenţă totală (condensator)

ar da infinit chiar dacă ar fi vorba despre o singură sarcină punctiformă. Acest lucru este evident deoarece energia totală a unei sarcini punctiforme ar fi egală cu lucrul mecanic pe care forţe exterioare sistemului le-ar efectua pentru a forma sarcina punctiformă din fragmente. Deoarece sarcina este punctiformă, fragmentele ar trebui sa fie aduse la distanţă nulă, situaţie în care legea lui Coulomb dă un câmp infinit. Deoarece şi potenţialul unei sarcini punctiforme este infinit la distanţă zero lucrul mecanic pentru a forma orice sarcină punctiformă este infinit. Ne punem întrebarea care este motivul pentru care întâmpinăm această problemă. Răspunsul la această întrebare este că modelul de sarcină punctiformă este cel care induce această dificultate. Deşi pentru calcule de câmp în exteriorul sarcinilor electrice, modelul oferă rezultate foarte bune, apropiate de cele măsurate experimental, o analiză mai profundă a oricărei sarcini electrice, indică cu claritate că aceasta ocupă un volum finit. Cu alte cuvinte, sarcina este distribuită într-un anumit volum, diferit de zero. Când se calculează energia totală a unei distribuţii volumice de sarcină, nu se mai obţine infinit. Singularitatea introdusă de presupunerea că sarcina s-ar afla într-un volum nul dispare când se presupune că sarcina se găseşte distribuită într-un volum finit. Astfel, (4.34) este energia totală a sarcinilor distribuite superficial pe conductori.

4.6 Energia electrostatică a unui condensator

Armăturile condensatorului, fiind situate în condiţii de influenţă totală, (Fig. 4.7) sarcinile lor sunt egale şi de semn contrar, $Q_1 = Q$ şi $Q_2 = -Q$.

Relaţiile dintre aceste sarcini şi potenţialele armăturilor au fost deja definite

$$\begin{aligned} V_1 &= p_{11}Q_1 + p_{12}Q_2 \\ V_2 &= p_{21}Q_1 + p_{22}Q_2 \end{aligned} \tag{4.35}$$

În aceste condiţii expresia (4.31) a energiei sistemului capătă o formă particulară reprezentând *energia condensatorului*:

$$W = \frac{1}{2}Q^2\left(p_{11} + p_{22} - 2p_{12}\right) = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \tag{4.36}$$

În această relaţie s-a ţinut cont de expresia generală a capacităţii potrivit căreia $C = 1/\left(p_{11} + p_{22} - 2p_{12}\right)$.

Luând în consideraţie relaţia de definiţie a capacităţii condensatorului $Q = C\left(V_1 - V_2\right)$, în care presupunem o armătură la potenţialul $V_1 = V$ iar cealaltă legată la Pământ, $V_2 = 0$, expresia (4.36) a energiei condensatorului poate fi formulată într-una dintre variantele următoare:

$$W = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \tag{4.37}$$

Exemple numerice: Un condensator a cărui capacitate este de 1 μF si a cărui tensiune nominală este de 100 kV poate să înmagazineze o energie electrostatică de 5 kJ dacă este încărcat sub această tensiune. Această energie este suficient de mare pentru a produce electrocutarea unui experimentator neizolat. Acelaşi experimentator nu va fi electrocutat la *tensiuni de acelaşi ordin de mărime* produse de o maşină electrostatică Whimshurst utilizată la experienţe demonstrative obişnuite, deoarece într-o astfel de maşină capacităţile sunt foarte mici, de ordinul 100 pF, şi în consecinţă energiile înmagazinate sunt sensibil mai slabe; comparativ, acestea sunt cu 4-5 ordine de mărime mai slabe decât în cazul precedent, nefiind astfel periculoase.

4.7 Relaţii între forţe, cupluri şi energie. Aplicaţii

Vom arăta în cele ce urmează că, pornind de la principiul conservării energiei, pot fi calculate forţele şi cuplurile care acţionează asupra unui sistem în echilibru electrostatic, în cazul în care energia electrostatică a acestuia variază. Pentru a defini circumstanţele în care energia electrostatică a unui

sistem poate să varieze, să considerăm cazul simplu al unui *sistem izolat* constituit din doi conductori încărcaţi cu sarcinile $+Q$ şi $-Q$ în condiţiile influenţei totale, cum este cazul unui condensator S-a constatat experimental că efectuarea unui lucru mecanic pentru a deplasa una dintre armături antrenează o variaţie a diferenţei de potenţial dintre ele. Conform relaţiei (4.37), energia electrostatică a sistemului a variat pe seama lucrului mecanic efectuat de forţe exterioare sistemului. Într-un sistem izolat, o astfel de *transformare de energie la sarcină constantă* poate fi interpretată luând in consideraţie un lucru virtual al forţelor electrostatice, căruia i se datorează variaţia energiei electrostatice a sistemului. Dar este posibil ca energia condensatorului să varieze cu distanţa dintre armături în condiţiile invarianţei potenţialului acestora. Pentru a menţine potenţialul constant, în timp ce distanţa dintre armături se micşorează, este necesar să comunicăm sistemului o sarcină suplimentară de la o sursă exterioară. În acest caz sistemul nu mai poate fi considerat ca un sistem izolat, şi variaţia energiei electrostatice a sistemului are loc în condiţiile unei *transformări la potenţial constant.*

1. Transformări la sarcină constantă:

Pentru a generaliza cele spuse mai sus relativ la transformări la sarcină constantă, considerăm un sistem de conductori izolaţi electric care poartă sarcini electrice constante (Fig. 4.8). În cursul deplasării virtuale $\vec{dl}$ a unuia dintre aceşti conductori, sistemul nu trebuie să primească energie din exterior. În condiţiile lucrului virtual al forţelor electrostatice, $\vec{F} \cdot \vec{dl}$, energia electrostatică a sistemului variază cu dW. Energia totală a sistemului izolat fiind constantă, variaţia acesteia este nulă:

$$dW + \vec{F} \cdot \vec{dl} = 0 \tag{4.38}$$

De aici se deduce imediat *relaţia dintre energie şi componenta forţei electrostatice în direcţia " i "* (definită în orice sistem de referinţă dat) *în condiţiile transformărilor la sarcină constantă*

$$F_i = -\left(\frac{\partial W}{\partial l_i}\right)_{Q=Ct} \quad sau\ vectorial, \qquad \vec{F} = -\,(gradW)_{Q=Ct} \tag{4.39}$$

În sistemul de referinţă cartezian $i = x, y, z$; în sistemul de coordonate sferice $i = r, \theta, \varphi$; în coordonate cilindrice $i = \rho, \varphi, z$.

Dacă, în loc de o deplasare $\vec{dl}$, forţele electrostatice exercită asupra unuia dintre conductorii sistemului considerat un cuplu de rotaţie virtual $\vec{\Gamma}$ cu un

B.C.U. „M. EMINESCU" IAŞI

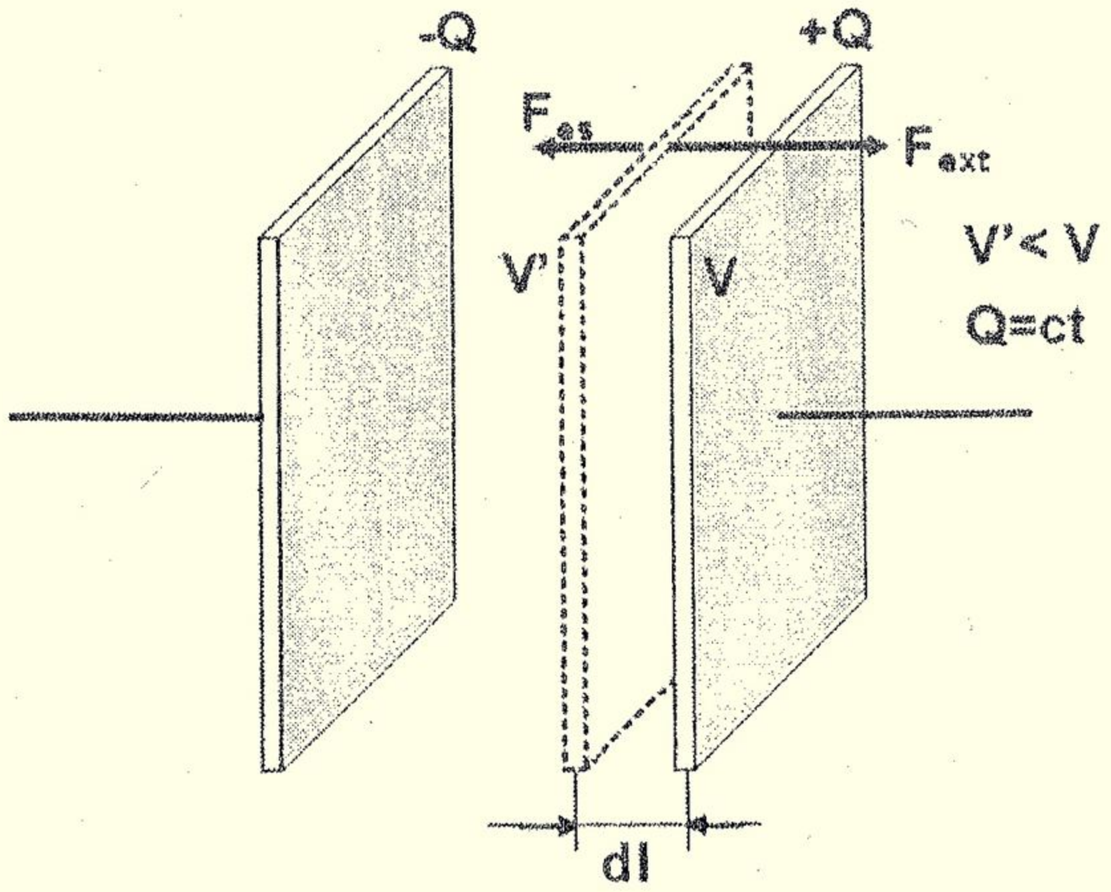


Figura 4.8: Sistem izolat. Transformare la sarcină constantă

unghi θ în jurul axei cuplului, se deduce în mod asemănător, din condiţia de conservare a energiei totale a sistemului, *relaţia dintre cuplu şi energie, în cazul transformărilor la sarcină constantă*:

$$\Gamma = -\left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)_{Q=Ct} \tag{4.40}$$

Expresiile (4.39) şi (4.40) arată că snsul forţei sau al cuplului este dirijat în aşa fel înât energia sistemului izolat să tindă să descrească. Rezultă că, la echilibru, energia sistemului izolat este minimă.

2. Transformări la potenţial constant S-a precizat la începutul acestui paragraf că aceste transformări au loc în condiţiile în care conductorii sunt în contact electric cu surse exterioare care au un potenţial constant, (Fig. 4.9). În cursul deplasării virtuale $\vec{dl}$ a unui conductor c_i, toţi ceilalţi conductori c_j primesc sarcini dQ_j de la sursele care le menţin potenţialele constante. Energia furnizată de sursele exterioare conductorilor c_j, (în condiţiile $V_i = Ct$), este $\sum d\left(Q_i V_i\right) = \sum V_i dQ_i$, în timp ce variaţia energiei electrostatice pe seama lucrului virtual al forţelor electrostatice $\vec{F} \cdot \vec{dl}$ este $dW = \frac{1}{2}\sum V_i dQ_i$. Bilanţul energetic al transformării la potenţial constant dă

$$dW + \vec{F} \cdot \vec{dl} - \sum V_i dQ_i = 0 \tag{4.41}$$

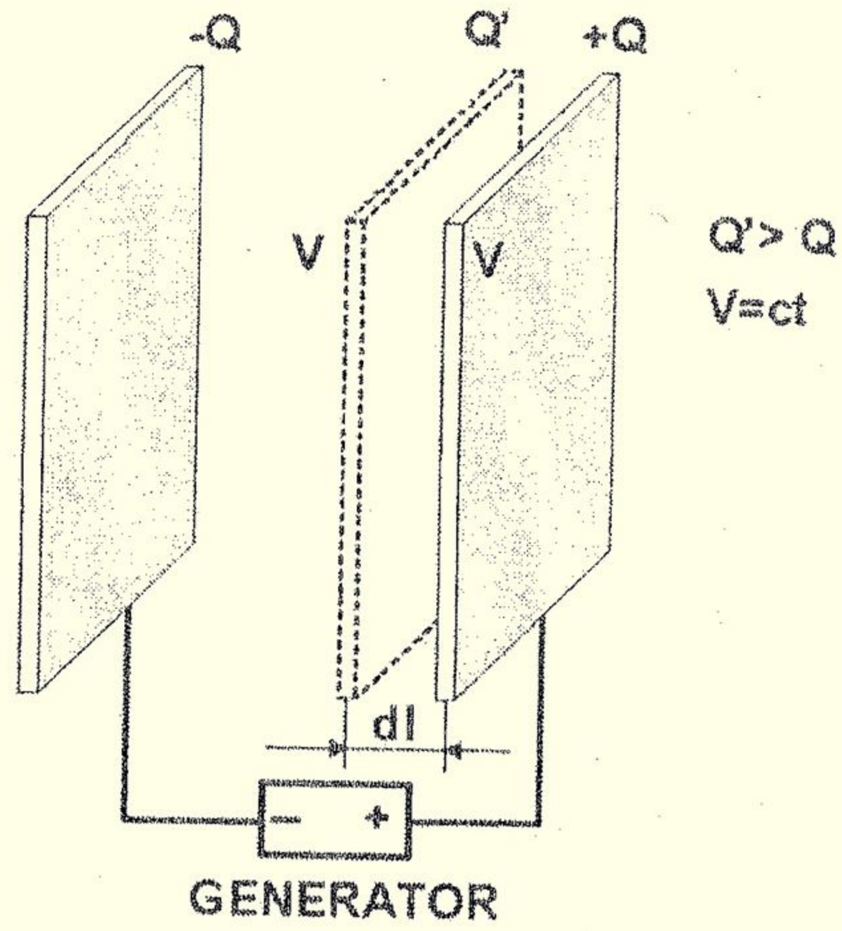


Figura 4.9: Transformare la potenţial constant

ţia de
ie, în

sau, ţinând cont de faptul că $\sum V_i dQ_i = 2dW$, această formulă devine

$$dW - \vec{F} \cdot \overrightarrow{dl} = 0 \tag{4.42}$$

(4.40)

Rezultă că, în condiţiile transformărilor la potenţial constant, relaţia dintre energie şi componenta forţei electrostatice în direcţia i este

ijat în
că, la

$$F_i = + \left(\frac{\partial W}{\partial l_i} \right)_{V=Ct} \quad sau\ vectorial \qquad \vec{F} = (gradW)_{V=Ct} \tag{4.43}$$

eputul
ducto-
ıstant,
:eilalţi
ţialele
n con-
ıergiei
$\vec{ll}$ este
nstant

În aceeaşi manieră se deduce *relaţia dintre cuplu şi energie la potenţial constant*:

(4.41)

$$\Gamma = + \left(\frac{\partial W}{\partial \theta} \right)_{V=Ct} \tag{4.44}$$

4.8 Energia unui dipol în câmpul electric

Considerăm un dipol "punctiform", situat într-un câmp electric. Distanţa $\overrightarrow{dR}$ dintre sarcinile $+Q$ şi $-Q$ ale dipolului este foarte mică, (Fig. 4.10), iar energiile potenţiale ale sarcinilor în câmpul exterior sunt $W_1 = -QV\left(\vec{R}\right)$

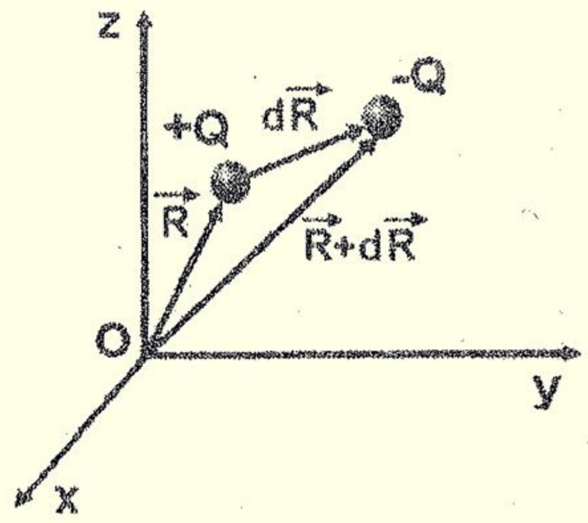


Figura 4.10: Energia unui dipol "punctiform" în câmp electric

şi $W_2 = +QV\left(\vec{R}+\overrightarrow{dR}\right)$. Energia dipolului în câmpul exterior este suma acestor două energii. Suprafeţele echipotenţiale pe care se află sarcinile fiind foarte apropiate, potenţialul $V\left(\vec{R}+\overrightarrow{dR}\right)$ poate fi scris ca o serie Taylor,

$$V\left(R+dR\right) = V\left(R\right) + \frac{\partial V}{\partial R}dR + \cdots,$$

şi neglijând termenii de ordin superior, expresia energiei dipolului capătă forma

$$W = W_1 + W_2 = Q\frac{\partial V}{\partial R}dR = QgradV \cdot \overrightarrow{dR} = gradV.\vec{p}$$

în care $\vec{p} = Q\overrightarrow{dR}$ este momentul electric al dipolului "punctiform".
Ţinând seama de relaţia dintre câmp şi potenţial, $\vec{E} = -gradV$ expresia *energiei dipolului* devine:

$$W = -\vec{p}\cdot\underline{E} = -pE\cos\theta \tag{4.45}$$

în care θ reprezintă unghiul format de direcţia dipolului cu direcţia câmpului exterior.

Energia dipolului corespunde energiei unui sistem izolat, astfel că aplicarea formulei (4.39) conduce la următoarea relaţie dintre forţă şi energie în cazul dipolului:

$$\vec{F} = grad\left(\vec{p}\cdot\vec{E}\right) \tag{4.46}$$

Se poate arăta însă că, deoarece câmpul electrostatic este un câmp cu rotaţional nul, $\overrightarrow{rot\vec{E}} = 0$, expresia (4.46) poate fi scrisă în consecinţă sub forma:

$$\vec{F} = \left(\vec{p}\cdot grad\right)\vec{E} \tag{4.47}$$

în care

$$\vec{p} \cdot grad = p_x \frac{\partial}{\partial x} + p_y \frac{\partial}{\partial y} + p_z \frac{\partial}{\partial z}$$

Se observă imediat că, într-un câmp electrostatic uniform ($E = const$), forţa care acţionează asupra dipolului este nulă, dar cuplul forţelor electrostatice nu este nul: într-adevăr, cu $W = -pE\cos\theta$, formula (4.41) dă următoarea expresie pentru cuplul care se exercită asupra dipolului considerat ca un sistem izolat

$$\Gamma = -\frac{\partial W}{\partial \theta} = -pE\sin\theta \tag{4.48}$$

sau vectorial

$$\vec{\Gamma} = \left(\vec{p} \times \vec{E}\right) \tag{4.49}$$

4.9 Electrometre

O serie de instrumente electrostatice utilizate pentru măsurarea tensiunilor şi a sarcinilor electrice, numite electrometre, funcţionează pe principiul interacţiunilor electrostatice, supunându-se relaţiilor dintre energie forţe şi cupluri. Efectiv, un electrometru este un condensator de capacitate foarte slabă, una dintre armăturile căruia este mobilă. Forţa sau cuplul care se exercită asupra acestei părţi mobile,ând armăturile se află la o dife- renţă de potenţial, este o funcţie de această diferenţă de potenţial. De aici posibilitatea de a utiliza electrometrele la măsurarea potenţialelor electrostatice sau a diferenţelor de potenţial. Cu toate că, în contextul progresului tehnic actual, interesul pentru aceste electrometre este în scădere datorită condiţiilor de măsură pretenţioase, ele prezintă un avantaj care nu poate fi egalat de voltmetrele uzuale de foarte bună calitate, anume: electrometrele nu consumă de la sursa de tensiune deât o energie foarte slabă, aceasta fiind destinată încărcării condensatorului. De exemplu, se consideră că un un voltmetru este de calitate foarte bună dacă are o rezistenţă de 50.000 Ω/V. Pentru măsurarea unei tensiuni de 200 volţi, rezistenţa sa de 10 M Ω consumă de la sursă o putere de 4.10^{-3} W. Aceeaşi tensiune poate fi măsurată cu un electrometru de capacitate de 15 pF a cărui rezistenţă de izolaţie este de $10^{14}\Omega$ şi consumă o putere de 4.10^{-10} W, care este absolut nesemnificativă. Deci un electrometru poate fi considerat efectiv ca un voltmetru cu rezistenţă proprie practic infinită. Un alt avantaj al electrometrelor constă în faptul că, în anumite modele, oferă posibilitatea de a efectua o *măsurare absolută* a tensiunii electrice. Într-o astfel de măsurare tensiunea este determinată în

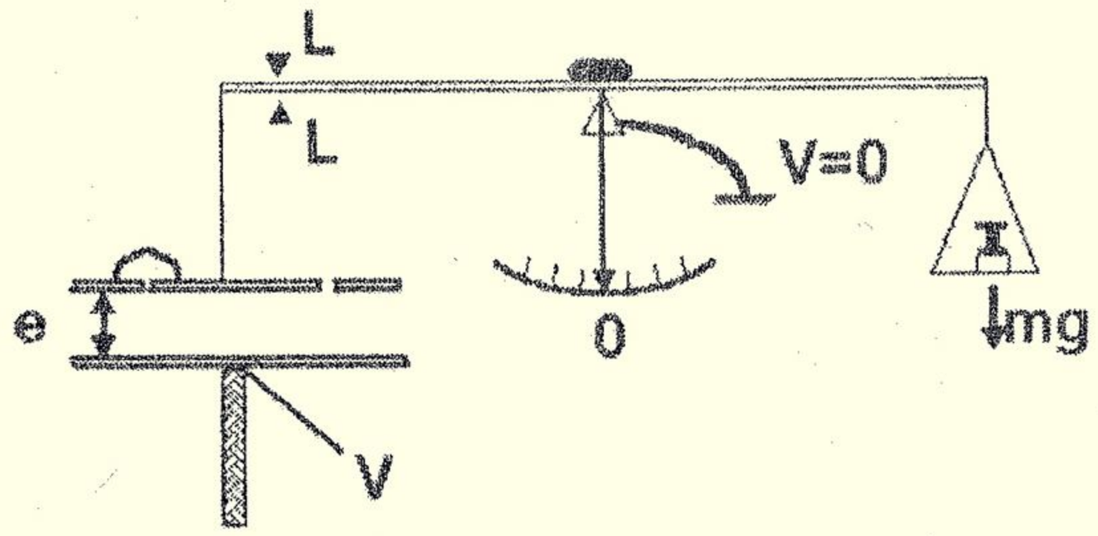


Figura 4.11: Electrometrul absolut Kelvin

funcţie de mărimi neelectrice. În general măsurările absolute sunt foarte preţioase în metrologia mărimilor fizice, spre deosebire de *măsurările relative* în care mărimile care se măsoară sunt comparate cu mărimi de aceeaşi natură definite ca etalon. Distingem, în cele ce urmează, electrometrele absolute şi electrometrele relative.

4.9.1 Electrometrul absolut

Acest electrometru numit uneori *electrometrul absolut Kelvin*, (Fig. 4.11), este în esenţă un condensator constituit din două armături plane, circulare; partea centrală a armăturii superioare este suspendată de braţul unei balanţe cu care se măsoară forţa de atracţie electrostatică a armăturii superioare mobile către armătura inferioară fixă. Pentru uniformizarea câmpului electric în zonele periferice ale armăturilor, armătura superioară este prevăzută cu un *inel de gardă* (un conductor plan, inelar coaxial şi la acelaşi potenţial cu armătura) În prealabil, în absenţa oricărei diferenţe de potenţial între armături, balanţa este adusă la echilibru. Braţul balanţei, în contact cu armătura superioară este legat la sol ($V = 0$) iar armătura inferioară, izolată, este pusă la potenţialul V de măsurat. Când se aplică diferenţa de potenţial V armătura superioară, a cărei suprafaţă este S, se deplasează în sensul micşorării distanţei e dintre armături. Unei variaţii a acestei distanţe în direcţia perpendiculară pe suprafaţa armăturilor îi corespunde o variaţie a capacităţii şi implicit a energiei condensatorului şi astfel expresia forţa de atracţie electrostatică dintre armături se scrie:

$$F = \frac{\partial W}{\partial e} = \frac{1}{2}V^2\frac{\partial C}{\partial e} = -\frac{1}{2}V^2\frac{\varepsilon_0 S}{e^2} \tag{4.50}$$

Se restabileşte echilibrul balanţei, respectiv distanţa iniţială e dintre armături, adăugându-se o masă m pe platanul aflat la extremitatea celuilalt braţ al balanţei. Dacă braţele balanţei sunt egale, la echilibru forţa electrostatică $\vec{F}$ este egală cu forţa de greutate $\vec{G} = m\vec{g}$ şi, din această egalitate, se obţine expresia potenţialului de măsurat:

$$V = e\sqrt{\frac{2mg}{\varepsilon_0 S}} \tag{4.51}$$

Echilibrul realizat este însă instabil. Pentru a depăşi acest inconvenient se limitează cursa braţului balanţei între două obstacole (notate cu L în Fig.V.11) Se poate proceda în felul următor: m fiind dat, se apropie armătura inferioară pânăând braţul balanţei părăseşte obstacolul superior. Se măsoară apoi distanţa e, suprimând tensiunea V şi aduând armătura inferioară în contact cu armătura superioară.

Se poate face o *măsurare heterostatică* a potenţialului V, dispunând de un potenţial auxiliar U care nu trebuie să fie cunoscut. Se determină mai întâi distanţa e necesară pentru ca echilibrul blanţei să aibă loc sub tensiunea U. Apoi, pentru aceeaşi masă m, se caută care este distanţa e' necesară pentru ca echilibrul balanţei să aibă loc pentru tensiunea $U + V$:

$$U = e\sqrt{\frac{2mg}{\varepsilon_0 S}}, \qquad U + V = e'\sqrt{\frac{2mg}{\varepsilon_0 S}}$$

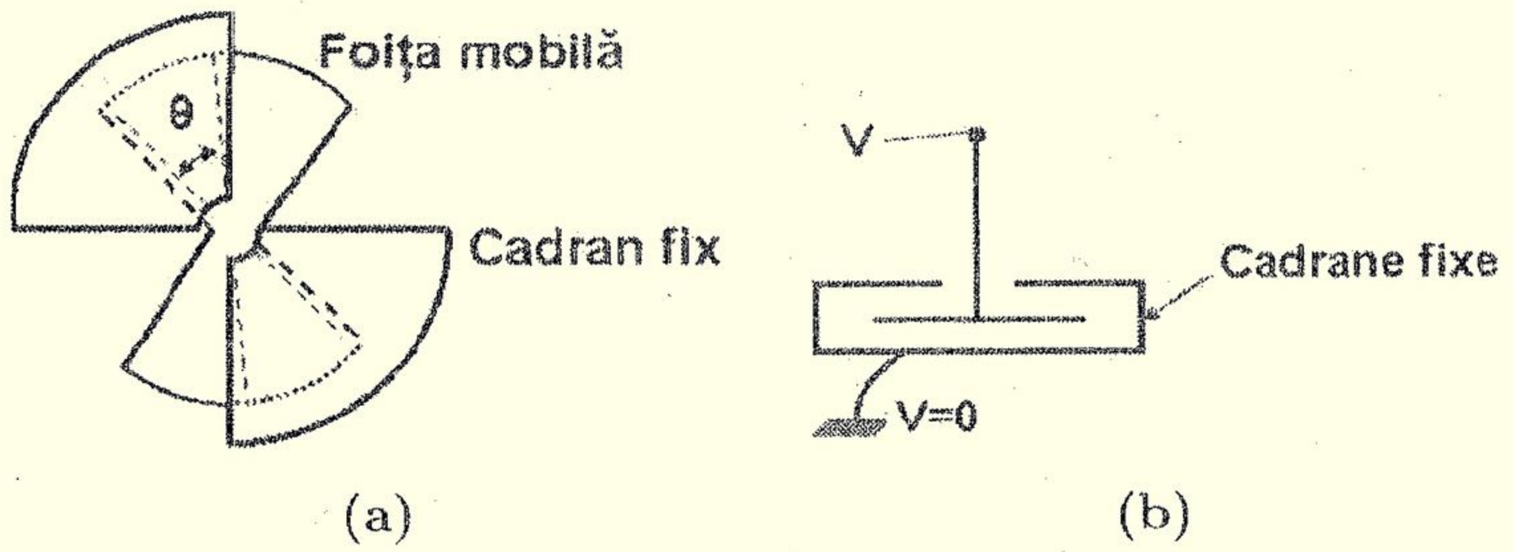
de unde rezultă expresia potenţialului de măsurat:

$$V = (e' - e)\sqrt{\frac{2mg}{\varepsilon_0 S}} \tag{4.52}$$

Această metodă n-ar necesita decât determinarea distanţei $e' - e$. *În ambele situaţii măsurătoarea este absolută deoarece tensiunea electrică este dată în funcţie de mărimi neelectrice (mecanice şi geometrice).*

4.9.2 Electrometre relative

O foiţă plană, conductoare, sub forma a două sectoare de cerc opuse (Fig. 4.12(a)), este suspendată de un fir de torsiune. Ea poate să se rotească într-o cutie metalică cilindrică, coaxială cu firul (Fig. 4.12(b)). Din această cutie au fost înlăturate două sectoare opuse. Celelalte două sectoare opuse sunt



(a) (b)

Figura 4.12: Electrometrul relativ cu două cadrane

fixe şi se află la un potenţial diferit de cel al foiţei mobile. Sarcinile electrice de un semn, de pe armăturile ce constituie sectoarele fixe, şi sarcinile de semn contrar de pe ac (foiţa mobilă), exercită un cuplu de forţe electrostatice Γ care tinde să rotească foiţa mobilă în spaţiul dintre sectoarele fixe, astfel înât capacitatea condensatorului să se mărească. Acestui cuplu i se opune cuplul forţelor de torsiune; acesta este proporţional cu unghiul de răsucire,

$$\Gamma' = K\theta. \tag{4.53}$$

În această rclaţie K este constanta de torsiune a firului de suspensic a foiţei mobile. Egalitatea celor două cupluri antagoniste, la potenţial constant, se stabileşte pentru un anumit unghi θ. Condiţia de echilibru formulată în acord cu relaţiile (4.45) şi (4.48) se scrie astfel:

$$\Gamma = \frac{\partial W}{\partial \theta} = \frac{1}{2}V^2\frac{\partial C}{\partial \theta} = \Gamma' = K\theta \tag{4.54}$$

Vom admite că în partea comună sectoare-ac există o regiune cuprinsă în unghiul θ unde câmpul electric este uniform. Capacitatea condensatorului astfel constituit poate fi exprimată sub forma,

$$C = k\theta + C' \tag{4.55}$$

în care k reprezintă capacitatea pe unitatea de unghi θ comun sistemului sectoare-foiţă, iar C'- capacitatea constituită de sectoare-foiţă în regiunea în care câmpul nu este uniform (la marginea sectoarelor şi a acului). Admitem că, în timpul rotirii foiţei, această capacitate C' nu se modifică, deci

$$\frac{\partial C}{\partial \theta} = k \tag{4.56}$$

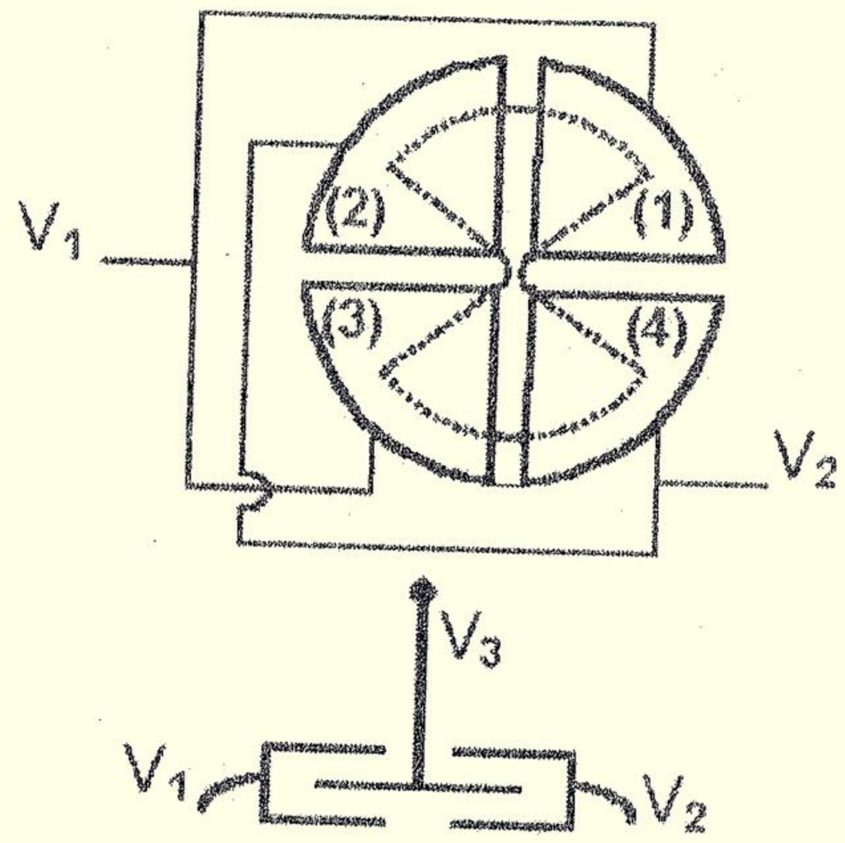


Figura 4.13: Electrometrul relativ cu patru cadrane

În aceste condiţii, expresia (4.51) a cuplului electrostatic devine

$$\Gamma = \frac{1}{2} k V^2 \tag{4.57}$$

şi condiţia de echilibru a cuplurilor duce la următoarea relaţie dintre potenţialul de măsurat şi deviaţia sistemului mobil al electrometrului:

$$V^2 = 2\frac{K}{k}\theta \tag{4.58}$$

Deviaţia θ a sistemului mobil este proporţională cu pătratul tensiunii, deci gradaţia scalei pe care se face lectura deviaţiei va avea o alură parabolică. *Sensibilitatea σ a acestui electrometru, definită ca o mărime numeric egală cu deviaţia produsă de o d.d.p de 1 volt,* $\sigma = d\theta/dV = (k/K)\,V$, fiind proporţională cu V, va fi cu atât mai mare cu ât tensiunea de măsurat este mai mare.

Se poate obţine sensibilitate mare la măsurarea tensiunilor slabe, dacă electrometrul precedent este completat cu toate cele patru sectoare, (Fig. 4.13), efectuându-se o măsusurătoare heterostatică a potenţialului

În acest electrometru cu patru cadrane (sectoare), două cadrane opuse sunt conectate la acelaşi potenţial V_1, celelalte două cadrane opuse sunt la potenţialul V_2, iar foiţa mobilă suspendată de firul de torsiune (care este conductor) se conectează la potenţialul V_3. Admiţând că sistemul este absolut

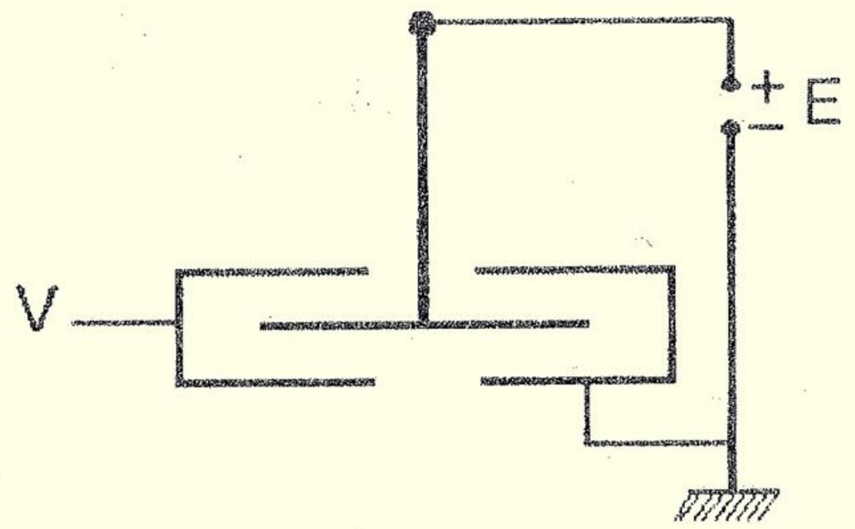


Figura 4.14: Electrometrul cu patru cadrane în montaj heterostatic simetric

simetric, o rotaţie foarte mică, $d\theta$ a foiţei va antrena o creştere $dC = kd\theta$ a capacităţii formate de foiţă şi o pereche de cadrane şi totodată o micşorare identică a capacităţii dintre foiţă şi celaltă pereche dc cadranc. Potenţialele fiind diferite, cuplurile datorate forţelor electrostatice vor fi deasemenea diferite, tinzând să rotească foiţa în sensul cuplului rezultant striând astfel simetria poziţiei unghiulare a foiţei mobile faţă de sistemul de cadrane. Acestui cuplu al forţelor electrostatice care provoacă rotaţia foiţei, i se opune cuplul de torsiune al firului de suspensie.Ând cuplul electrostatic rezultant şi cuplul de torsiune devin egale, foiţa se stabileşte în poziţia unghiulară θ definită în raport cu poziţia pe care o ocupa iniţial, în absenţa tensiunilor electricc. Cadranele (1) şi (3), fiind la potenţialul V_1, cadrancle (2) şi (4) la potenţialul V_2, şi foiţa mobilă la potenţialul V_3, expresiile cuplurilor electrostatice exercitate asupra foiţei se definesc în aceeaşi manieră ca în relaţia (4.52):

$$\Gamma_1 = \frac{1}{2}k\,(V_3 - V_2)^2 \qquad \text{şi} \qquad \Gamma_2 = \frac{1}{2}k\,(V_3 - V_1)^2$$

Cel mai mare dintre aceste cupluri antagoniste, corespunzând celei mai mari diferenţe de potenţial, $V_3 - V_2$ sau $V_3 - V_1$, fixează sensul de rotaţie al foiţei. Cuplul electostatic rezultant, Γ este diferenţa acestor două cupluri; la echilibru acesta este egal cu cuplul de torsiune $\Gamma' = K\theta$:

$$\Gamma = \frac{1}{2}k\,(V_1 - V_2)\left(V_3 - \frac{V_1 + V_2}{2}\right) = K\theta \tag{4.59}$$

Într-un montaj heterostatic simetric (Fig. 4.14), se foloseşte o sursă de tensiune auxiliară E conectată între foiţa mobilă şi sol, iar tensiunea V de măsurat este conectată între cele două perechi de cadrane dintre care una

este în contact cu solul. Astfel cele trei potenţiale devin, $V_3 = E$, $V_1 = V$ şi $V_2 = 0$, iar relaţia (4.59) se reduce la

$$kV\left(E - \frac{V}{2}\right) = K\theta \tag{4.60}$$

Acest montaj se utilizează la măsurarea tensiunilor V slabe. Dacă V este de ordinul voltului, formula precedentă dă acest potenţial sub forma următoare, cu o eroare relativă egală cu $V/2E$:

$$V = \frac{K}{kE}\theta \tag{4.61}$$

Dacă sursa auxiliară este o baterie de acumulatori a cărei t.e.m. este E=100 volţi iar tensiunea de măsurat este de 1 volt, formula (4.60) dă potenţialul V cu o eroare de 0,5%.

Sensibilitatea acestui electrometru, $\sigma = d\theta/dV = (k/K)\,E$, nu mai este dependentă de V ca în cazul electrometrului cu o singură pereche de cadrane; ea poate fi mărită utilizând o sursă auxiliară de tensiune E mare. Pe de altă parte linearitatea dependenţei $V(\theta)$ implică o gradaţie uniformă a scalei acestui electrometru.

C

C

C

5.

nele
în r
elec

au e
cânc
supu
(Fig
aceş
în m

pluri

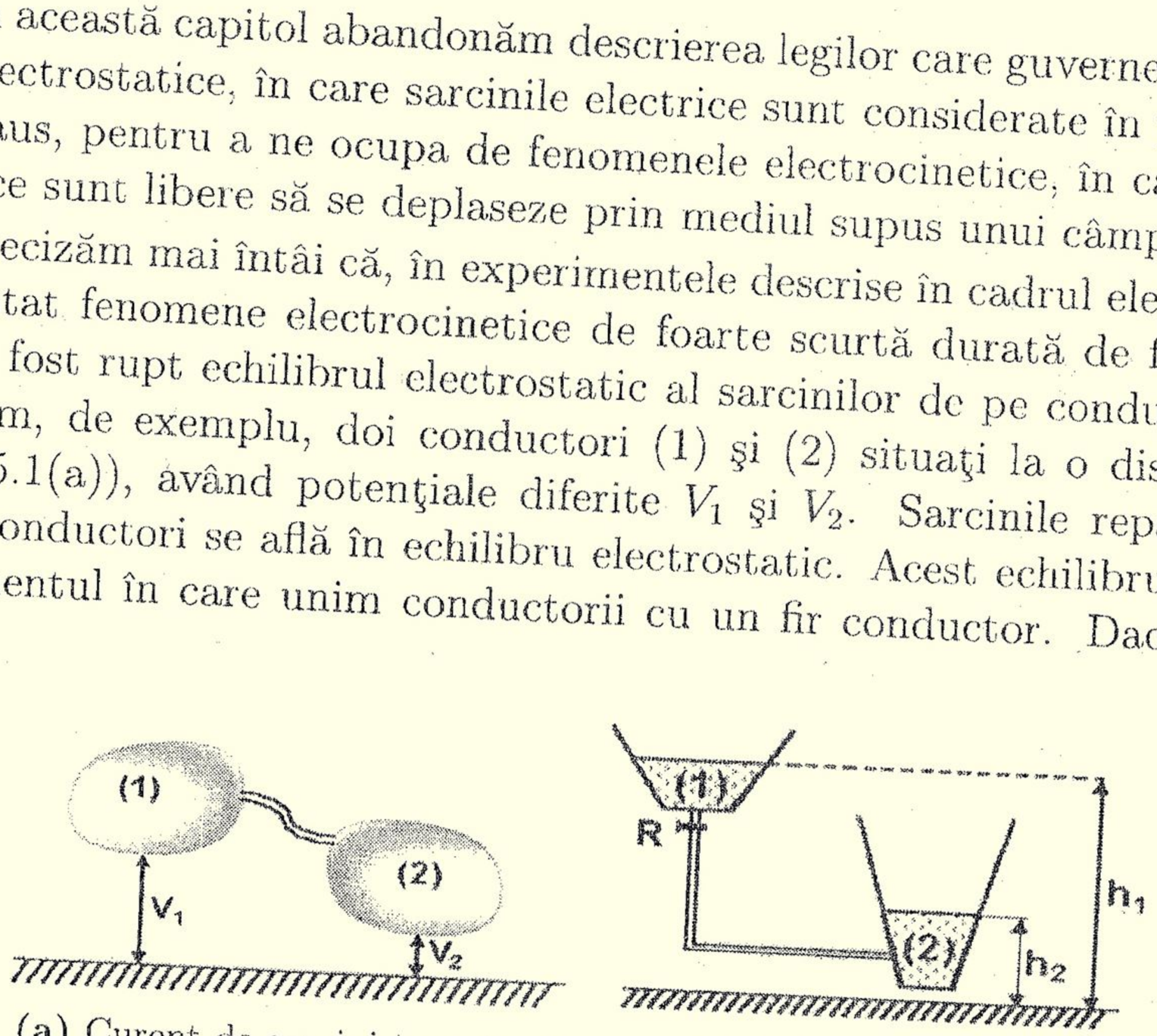
Capitolul 5

Curentul electric

5.1 Curent electric tranzitoriu şi curent permanent

În această capitol abandonăm descrierea legilor care guvernează fenomenele electrostatice, în care sarcinile electrice sunt considerate în permanenţă în repaus, pentru a ne ocupa de fenomenele electrocinetice, în care sarcinile electrice sunt libere să se deplaseze prin mediul supus unui câmp electric.

Precizăm mai întâi că, în experimentele descrise în cadrul electrostaticii, au existat fenomene electrocinetice de foarte scurtă durată de fiecare dată când a fost rupt echilibrul electrostatic al sarcinilor dc pe conductori. Presupunem, de exemplu, doi conductori (1) şi (2) situaţi la o distanţă fixă, (Fig. 5.1(a)), având potenţiale diferite V_1 şi V_2. Sarcinile repartizate pe aceşti conductori se află în echilibru electrostatic. Acest echilibru va fi rupt în momentul în care unim conductorii cu un fir conductor. Dacă $V_1 > V_2$



(a) Curent de sarcini tranzitoriu

(b) Echivalent mecanic

Figura 5.1: Curentul electric

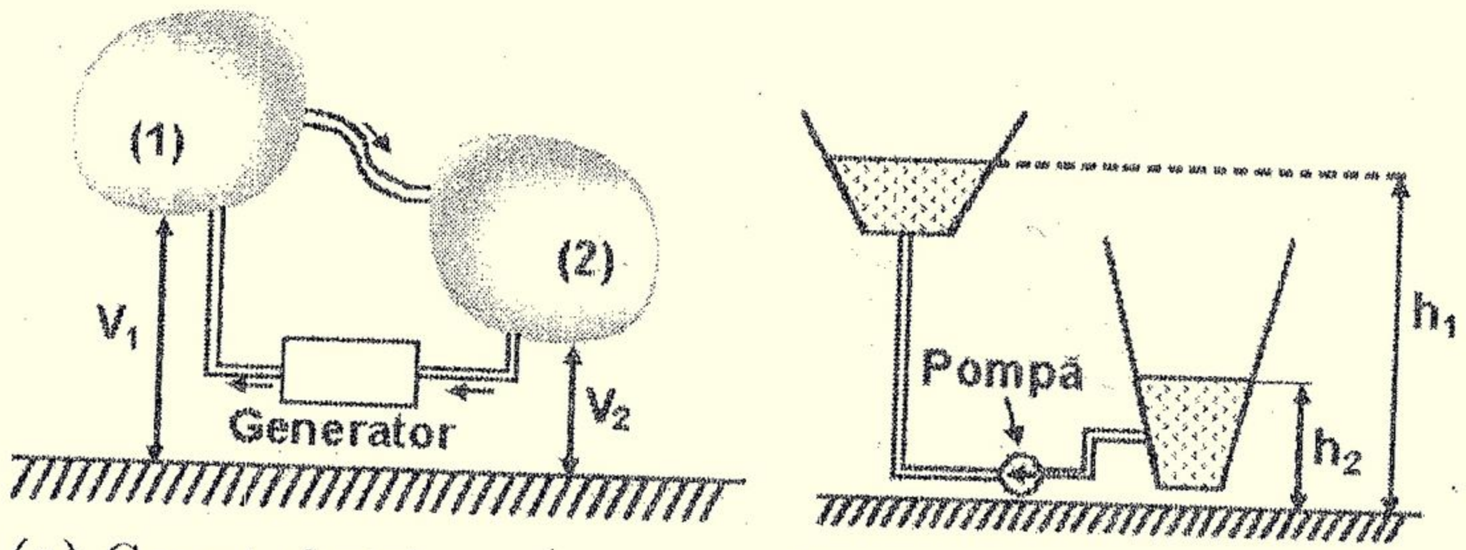
sarcinile pozitive se vor scurge prin fir de la conductorul (1) către (2), antrenând o micşorare a potenţialului V_1 şi o creştere a potenţialului V_2. În cazul conductorilor metalici, în care conducţia este datorată electronilor liberi, aceştia se vor deplasa prin fir în sens invers câmpului, de la conductorul (2) către (1). Această mişcare de sarcini încetează rapid în momentul în care potenţialele celor doi conductori au devenit egale. În acest caz, sarcinile sistemului de conductori, redistribuite într-o nouă stare de echilibru, se află toate la un potenţial unic V cuprins între V_1 şi V_2. Echivalentul hidraulic al acestui experiment este reprezentat în Fig. 5.1(b). Lichidele din două vase (1) şi (2), fiind iniţial la înălţimi diferite, rămân în echilibru atât timp ât vasele nu comunică între ele (robinetul de pe tubul comun este închis). Din momentul stabilirii comunicaţiei (deschiderea robinetului), nivelul lichidului din vasul (1) coboară în timp ce nivelul din vasul (2) urcă. Transportul de lichid încetează când masele de lichid din cele două vase au ajuns la un nou echilibru care se stabileşte pentru un nivel intermediar. Mărimile corespondente care intervin în aceste două experimente sunt, pe de o parte, sarcina electrică-masa lichidului şi, pe de alta, potenţialul electric-nivelul lichidului.

In concluzie sarcinile electrice, deplasându-se prin firul conductor între două suprafeţe echipotenţiale, formează un curent de sarcini. Acest curent există numai pe durata tranziţiei de la starea de echilibru iniţială în care potenţialele sunt diferite, la starea finală în care diferenţa de potenţial se anulează. Efectiv acesta este un *curent electric tranzitoriu sau variabil în timp*. Pentru a realiza o circulaţie continuă a sarcinilor prin firul conductor este necesar un dispozitiv care, menţinând constantă diferenţa de potenţial, să poată asigura o mişcare permanentă a sarcinilor, generând astfel în circuit un *curent electric permanent*. În experimentul hidraulic echivalent, o pompă hidraulică ar juca rolul acestui generator, făând să circule lichidul în mod permanent, în circuit închis, în maniera indicată în (Fig. 5.2(a), 5.2(b)).

5.2 Densitate de curent electric

1. Definiţie

Pentru a defini cantitativ curentul de sarcini electrice printr-un conductor vom introduce noţiunea de densitate de curent. Această mărime trebuie să fie evident în relaţie directă cu densitatea volumică a sarcinilor din conductor şi cu viteza lor. Să examinăm mai îndeaproape acest curent de sarcini, (Fig. 5.3) într-o porţiune de volum v, localizată în conductorul parcurs de



(a) Curent electric permanent în circuit închis

(b) Experiment hidraulic echivalent

Figura 5.2: Curentul electric

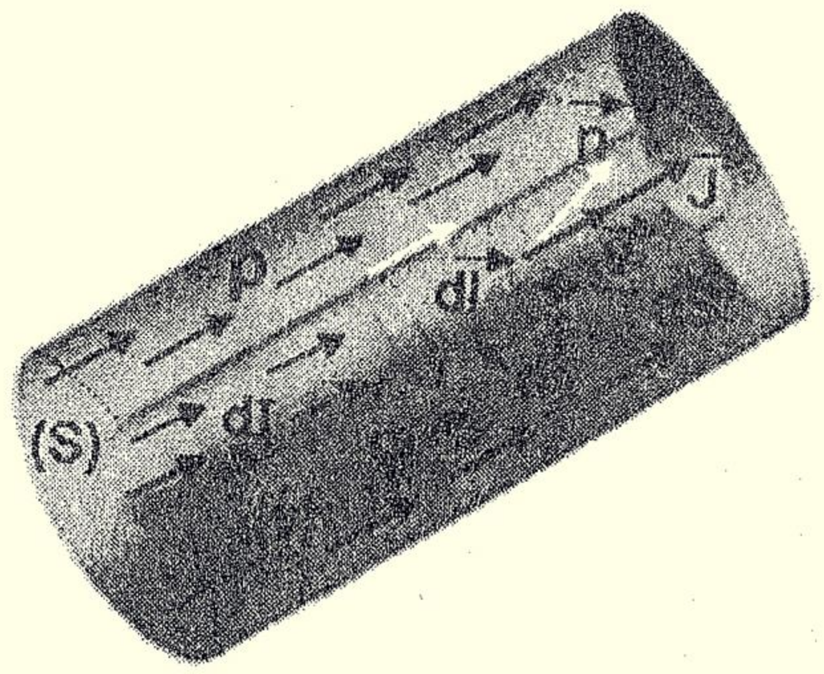


Figura 5.3: Vectortul densitate de curent $\vec{J}$ într-o porţiune de conductor de volum v în care, sarcinile de densitate volumică ρ se deplasează cu viteza $\vec{v}$

curent (Fig. 5.2(a)). Vom face abstracţie de faptul că în conductori sarcinile mobile sunt electronii care se deplasează în sens opus câmpului electric, presupunând că, într-un cilindru elementar de volum dv şi de secţiune dS, sarcinile pozitive se deplasează cu viteza $\vec{v}$ constantă, în direcţia câmpului electric pe distanţa dl paralelă cu generatoarea. Considerăm totodată că, în acest volum elementar, densitatea de sarcină ρ este constantă. Sarcina dQ aflată în volumul dv este:

$$dQ = \rho dv = \rho \overrightarrow{dS} \vec{v} dt \tag{5.1}$$

Definim *intensitatea curentului electric* I *ca fiind o mărime numeric egală cu sarcina care străbate secţiunea conductorului în unitatea de timp.* Prin

secţiunea dS a cilindrului elementar considerat, va trece numai o fracţiune dI din curentul total care străbate întregul volum v:

$$dI = \frac{dQ}{dt} = \rho dS\,(\vec{n}\cdot\vec{v}) \tag{5.2}$$

Introducem în această ecuaţie (6.2) vectorul densitate de curent,

$$\vec{J} = \rho\vec{v} \tag{5.3}$$

al cărui modul caracterizează *sarcina care traversează unitatea de suprafaţă în unitatea de timp.* Definim, la fel ca în electrostatică, o linie de curent electric ca fiind linia la care vectorul $\vec{J}$ este tangent în orice punct al ei. Totalitatea liniilor de curent care se sprijină pe conturul unei suprafeţe formează un tub de curent.

În virtutea definiţiei date vectorului $\vec{J}$ în (6.3), expresia (6.2), care reprezintă curentul electric elementar dI prin tubul de curent de secţiune dS, se scrie:

$$dI = \vec{J}\cdot\overrightarrow{dS} = \left(\vec{J}\cdot\vec{n}\right)dS \tag{5.4}$$

şi astfel intensitatea curentului electric I se defineşte ca *fluxul vectorului densitate de curent $\vec{J}$ care traversează normal întreaga secţiune S a unui conductor*:

$$I = \int_S \vec{J}\cdot\overrightarrow{dS} \tag{5.5}$$

2. Proprietăţile vectorului densitate de curent $\vec{J}$

1) Curent constant şi curent variabil

Conform relaţiei (6.3), vectorul densitate de curent $\vec{J}$ este definit, în general, ca o funcţie de variabile de spaţiu (x, y, z) şi de variabila timp (t).

Dacă densitatea de sarcină ρ este constantă în timp, vectorul $\vec{J}$, la rândul lui, este independent de timp. În cest caz avem un curent constant sau un *curent continuu* şi vectorul $\vec{J}$ este definit ca o funcţie numai de coordonatele spaţiale:

$$\vec{J} = \vec{J}(x, y, z) \tag{5.6}$$

Când densitatea de sarcină ρ variază în timp, $\vec{J}$ depinde şi el de timp. În acest caz avem un *curent variabil* şi vectorul $\vec{J}$ este definit ca o funcţie atât de coordonatele spaţiale cât şi de timp:

$$\vec{J} = \vec{J}(x, y, z, t) \tag{5.7}$$

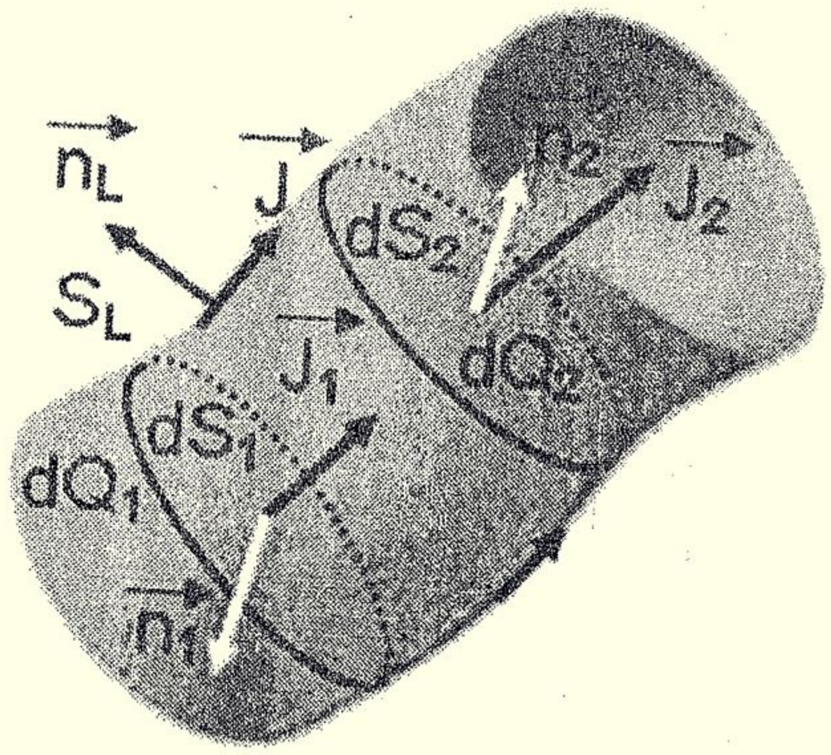


Figura 5.4: Proprietăţi ale vectorului $\vec{J}$ în regim de curent constant condiţionate de neacumularea sarcinii pe suprafaţa lateraală a conductorului şi de conservarea sarcinii într-un tub de curent

Particularităţile vectorului $\vec{J}$ în regim variabil vor fi examinate într-un capitol aparte. *În cadrul capitolului de faţă vom lua în consideraţie numai regimul de curent continuu în care toate mărimile electrice care intervin sunt independente de timp.*

2) – Proprietăţile vectorului $\vec{J}$ în regim de curent continuu

Regimul de curent continuu conferă vectorului $\vec{J}$ o serie de proprietăţi relevante:

a) Considerăm (Fig. 5.4) un tub de curent localizat într-un segment de volum v din conductorul din (Fig. 5.3) în care sarcinile se deplasează cu viteză constantă. Pentru ca densitatea de sarcină ρ să rămână constantă este necesar să nu existe acumulări de sarcini pe suprafaţa laterală a tubului. Dacă aceste acumulări ar exista, ele ar condiţiona o dependenţă de timp a lui ρ. Deoarece liniile de curent sunt paralele cu suprafaţa laterală S_L a tubului de curent, *condiţia de ne-acumulare de sarcină pe suprafaţa conductorului* este echivalentă cu condiţia ca produsul scalar $\left(\vec{J} \cdot \vec{S}_L\right)$ să fie nul. Notând cu $\vec{n}_L$ versorul suprafeţei S, care este un vector normal pe suprafaţa S_L, această *proprietate a vectorului $\vec{J}$ în regim de curent continuu* se scrie:

$$\vec{J} \cdot \vec{n}_L = 0 \tag{5.8}$$

b) Considerând acelaşi tub de curent (Fig. 5.4), limitat de secţiunile dS_1

şi dS_2, condiţia de ne-acumulare de sarcină pe suprafaţa laterală a tubului, sau ca densitatea de sarcină ρ să fie constantă, este echivlentă cu condiţia ca, sarcina dQ_1 care traversează secţiunea dS_1 într-un interval de timp dt, să fie egală cu sarcina dQ_2 care traversează secţiunea dS_2 a aceluiaşi tub, în acelaşi interval de timp:

$$dQ_1 = dQ_2, \tag{5.9}$$

sau, în virtutea relaţiilor (6.1) şi (6.3),

$$\left(\vec{J}_1 \cdot \vec{n}_1\right) dS_1 dt + \left(\vec{J}_2 \cdot \vec{n}_2\right) dS_2 dt = 0 \tag{5.10}$$

Această formulă exprimă efectiv o *proprietate de conservare a fluxului vectorului $\vec{J}$ prin suprafaţa tubului de curent.* Câmpul vectorilor $\vec{J}$ fiind cu flux conservativ, acesta se supune relaţiei

$$\int_S \vec{J} \cdot \overrightarrow{dS} = 0 \tag{5.11}$$

Transformând integrala de suprafaţă într-o integrală de volum, această proprietate a vectorului $\vec{J}$, valabilă în orice punct din conductor în regim de curent continuu, poate fi exprimată sub o formă locală sau diferenţială:

$$div\vec{J} = 0 \tag{5.12}$$

3) Conducţia electrică în mediile materiale

a) Conducţia în metale

Sarcinile mobile în materialele solide conductoare sunt electronii liberi. Pentru a sugera o idee asupra mecanismului conducţiei electronice în metale, vom porni de la estimarea vitezei medii de deplasare a electronilor într-un conductor parcurs de un curent continuu de intensitate I. În virtutea relaţiilor (5.3) şi (5.4 această viteză este

$$v = \frac{J}{\rho} = \frac{I}{\rho S} \tag{5.13}$$

în care S este secţiunea transversală a conductorului. Pentru simplitate vom considera un conductor dintr-un metal monovalent, de exemplu de cupru, în care conducţia este asigurată de singurul electron liber al fiecărui atom de cupru din reţeaua cristalină. Admiţând că n este numărul de atomi de

cupru aflaţi în unitatea de volum, densitatea volumică de sarcină electronică ρ poate fi exprimată prin relaţia

$$\rho = -ne \tag{5.14}$$

şi astfel, expresia densităţii volumice de curent devine

$$\vec{J} = -ne\vec{v} \tag{5.15}$$

Numărul de electroni n din unitatea de volum de cupru monovalent se obţine multipliând numărul de moli N_A (numărul lui Avogadro) cu raportul dintre densitatea masică δ şi masa atomică M:

$$n = \frac{\delta}{M} N_A \tag{5.16}$$

Cu valorile, $N_A = 6.10^{26} molecule/kilomol$, $M = 9.10^3 kg$, $\delta = 63,5 kg/m^3$, formula (5.17) dă $n = 8.10^{28} electroni/m^3$. Introducând acest rezultat în expresia (6.14), şi luând în consideraţie sarcina electronului, $e = 1,6.10^{-19} C$, obţinem o valoare enormă pentru densitatea volumică de sarcină electronică. Se inţelege că în conductor această sarcină este compensată complet de sarcina ionilor pozitivi din reţeaua cristalină.

Pentru un conductor de cupru cu secţiunea $S = 1 mm^2$, parcurs de un curent suficient de mic pentru a nu produce un efect termic sensibil, de exemplu $I = 1 amper$, formula (5.13) dă, pentru viteza medie a electronilor, valoarea:

$$v = \frac{1}{1,2.10^{10} \times 10^{-6}} = 8.10^{-5} m/s$$

Pentru un curent de 5 amperi, care este suficient pentru a produce o încălzire sensibilă a aceluiaşi conductor, se obţine o viteză de 5 ori mai mare, $v = 4.10^{-4}$ m/s. În orice caz, aceste viteze sunt mult mai mici deât s-ar fi aşteptat, având în vedere faptul că valoarea vitezei instantanee a electronilor, în condiţiile unei deplasări libere, fără obstacole, prin reţeaua cristalină a metalului, este de ordinul 10^6 m/s. Este de presupus că valorile mici, de ordinul 10^{-4} m/s, sugerate de calculul precedent, corespund unei viteze medii (viteză de drift) a electronilor aflaţi într-o mişcare discontinuă cu viteze de ordinul 10^6 m/s, aceste viteze fiind orientate în toate direcţiile, prin efectul interacţiunilor sau a şocurilor care au loc între electronii liberi sau între electroni şi ionii reţelei. În absenţa curentului, viteza medie pe traiectoriile discontinue este nulă, aşa cum sugerează graficul din (Fig. 5.5a), şi în consecinţă curentul

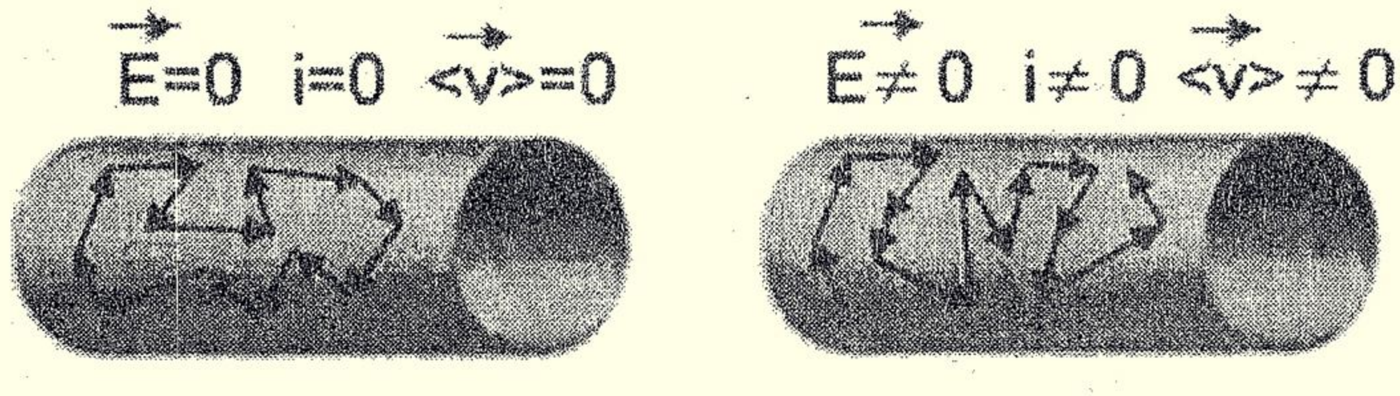


Figura 5.5: Traiectoria unui electron în conductor. a)în absenţa câmpului electric exterior; b)în prezenţa câmpului

este nul. În prezenţa câmpului electric exterior, curentul nu este nul, (Fig. 5.5b), dar viteza medie este mică deoarece ea reprezintă o sumă vectorială a vitezelor instantanee ale fiecărui electron pe traiectorii discontinue, acestea fiind forţate să se orienteze mai mult sau mai puţin în sensul câmpului, aşa cum sugerează graficul din (Fig. 5.5b).

5.3 Legea lui Ohm.

5.3.1 Legea lui Ohm sub formă locală. Conductivitate. Rezistivitate

a) Expresia generală a legii lui Ohm locale Când unui mediu conductor i se aplică o diferenţă de potenţial constantă, acesta este traversat de un curent electric continuu. Într-o manieră generală, admitem că între două secţiuni oarecare din conductor, aflate la potenţialele V_1 şi V_2 (Fig. 5.6) există un câmp electric, ce derivă din potenţialul electrostatic aplicat; acest câmp se supune regulilor deja cunoscute: liniile de câmp sunt perpendiculare pe suprafeţele echipotenţiale şi vectorul câmp electric este dirijat în sensul echipotenţialelor descrescătoare. În aceste condiţii fiecare particulă purtătoare de sarcină electrică q situată în mediul conductor este supusă forţei electrice,

$$\vec{F} = q\vec{E} \tag{5.17}$$

Dacă ar acţiona numai această forţă, ea ar comunica particulelor o mişcare accelerată, astfel înât viteza sarcinilor ar trebui să crească şi totodată curentul electric să crească în timp, deşi diferenţa de potenţial $V_1 - V_2$ este

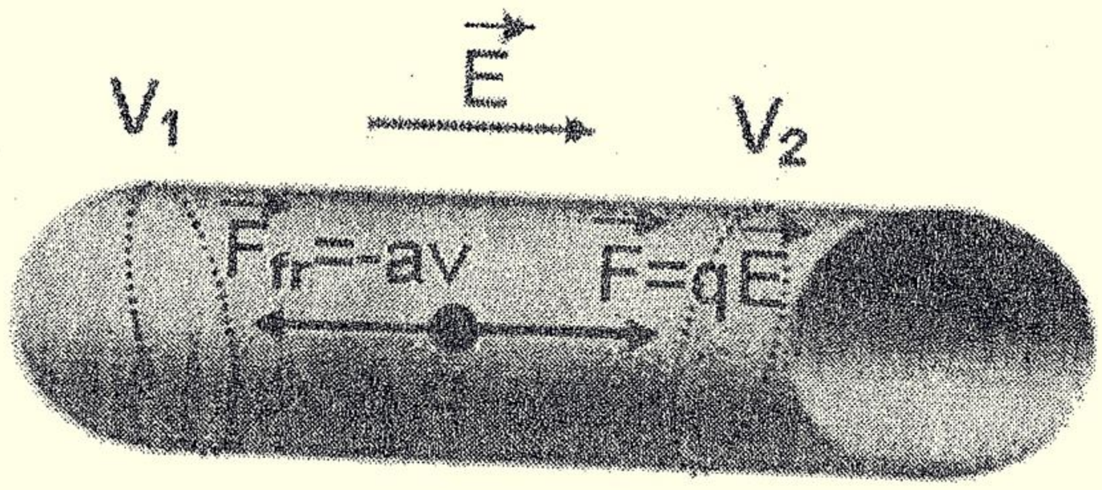


Figura 5.6: Echilibrul forţelor, electrostatică şi de frecare, care acţionează asupra unei sarcini q în mişcare cu viteza $\vec{v}$

constantă în timp! Aceasta nu se intâmplă în realitate deoarece, aşa cum s-a văzut mai înainte, sarcinile nu se deplasează liber în mediul conductor, ci sunt supuse unor forţe de frânare datorate, fie intercţiunilor dintre ele, fie interacţiunilor cu reţeaua. Aceste forţe $\vec{F}_{fr}$, care nu sunt fără analogie cu forţele de frecare mecanică, sunt dirijate în sens invers mişcării şi sunt proporţionale cu viteza sarcinilor,

$$\vec{F}_{fr} = -a\vec{v} \tag{5.18}$$

Efectiv forţele de frecare nu sunt o ficţiune ci ele sunt la originea efectului de încălzire a conductorului parcurs de curentul electric, (efectul Joule).

Când forţa electrostatică este echilibrată de forţa de frecare mişcarea sarcinilor,are loc cu o viteză medie constantă şi, în consecinţă, curentul electric este constant. Această condiţie se scrie:

$$\vec{F} + \vec{F}_{fr} = 0 \tag{5.19}$$

În virtutea formulelor (6.18) şi (6.19), se deduce că viteza sarcinilor este proporţională cu câmpul electric:

$$\vec{v} = \frac{q}{a}\vec{E} \tag{5.20}$$

ţinând seama de expresia densităţii de curent, $\vec{J} = \rho\vec{v}$, şi notând $\gamma = \frac{\rho q}{a}$, obţinem rclaţia următoare:

$$\vec{J} = \gamma\vec{E} \tag{5.21}$$

Această relaţie este cunoscută sub numele de *legea lui Ohm locală*. Ea defineşte, *în orice punct din conductor*, vectorul densitate de curent $\vec{J}$ ca fiind

un vector proporţional cu câmpul electric $\vec{E}$ şi coliniar cu acesta. Constanta de proporţionalitate γ este numită *conductivitatea electrică* a mediului. Deşi raţionamentul care ne-a condus la formularea acestei legi este foarte simplu, legea este generală pentru toate mediile conductoare.

b) Conducţia electronică

În cazul particular al conductorilor metalici, în care conducţia este datorată electronilor liberi, regăsim legea lui Ohm locală pornind de la raţionamentul următor: Imediat după fiecare şoc, electronul, supus forţei electrostatice $\vec{F} = -e\vec{E}$, capătă o mişcare uniform accelerată a cărei viteză $\vec{v}$ verifică ecuaţia fundamentală a dinamicii, $\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$, în care m este masa electronului. Egalitatea forţelor,

$$-e\vec{E} = m\frac{d\vec{v}}{dt}, \tag{5.22}$$

ne permite să determinăm viteza instantanee $\vec{v}(t)$. Cu condiţii iniţiale, în care se consideră ca origine de timp $(t = 0)$ momentul şocului la care viteza iniţială este $\vec{v}_0$, soluţia acestei ecuaţii diferenţiale (6.22), obţinută după integrare, este

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 - \frac{e\vec{E}}{m}t \tag{5.23}$$

Pentru a defini curentul electric datorat mişcării electronilor, este necesar să luăm în consideraţie *viteza medie* a acestora. Admiţând că *intervalul de timp mediu* între două şocuri este 2τ, viteza medie $< \vec{v} >$ se obţine mediind viteza electronului $\vec{v}(t)$ pe această durată2τ. Astfel:

$$< \vec{v} >= \frac{1}{2\tau}\int_0^{2\tau} \vec{v}(t)\,dt =< \vec{v}_0 > -\frac{e\vec{E}}{m}\tau \tag{5.24}$$

Având în vedere faptul că vitezele iniţiale $\vec{v}_0$ ale electronilor sunt orientate în toate direcţiile, în condiţiile numeroaselor şocuri care pot avea loc intr-un interval de timp mare faţă de durata τ, valoarea medie a acestor viteze este practic nulă, $< \vec{v}_0 >= 0$. În aceste condiţii expresia vitezei medii (6.24) capătă o formă simplă:

$$< \vec{v} >= -\frac{e\vec{E}}{m}\tau \tag{5.25}$$

Considerând că n este numărul de electroni pe unitatea de volum din materialul conductor şi că $\rho = -ne$ este densitatea volumică de sarcină electronică, densitatea volumică de curent, definită în general ca $\vec{J} = \rho\vec{v}$, capătă

următoarea expresie în condiţiile conducţiei electronice:

$$J = \frac{ne^2\tau}{m}\vec{E} \tag{5.26}$$

Introduând în această expresie notaţia

$$\gamma = \frac{ne^2\tau}{m}, \tag{5.27}$$

regăsim expresia generală a legii lui Ohm locală, $\vec{J} = \gamma\vec{E}$. Este de aşteptat ca, în condiţiile conducţiei electronice, conductivitatea γ să depindă de natura materialului, deoarece valorile lui n şi τ diferă în mod necesar de la un material la altul.

c) Mobilitate electrică

Uneori, în loc de conductivitatea γ se foloseşte noţiunea de *mobilitate* a sarcinii în conductor. Această noţiune este sugerată de expresia (6.20) în care viteza sarcinii este proporţională cu câmpul electric. Factorul de proporţionalitate este numit mobilitate şi se notează cu μ. În condiţiile conducţiei electronice avem următoarele relaţii care definesc mobilitatea μ:

$$\vec{v} = -\mu\vec{E} \qquad \text{şi} \qquad \mu = \frac{e\tau}{m} \tag{5.28}$$

Formulele (6.27) şi (6.28) conduc la o relaţie de proporţionalitate a conductivităţii electronice a metalului cu densitatea şi mobilitatea electronilor:

$$\gamma = ne\mu. \tag{5.29}$$

d) Rezistivitate

În mod frecvent se utilizează mărimea inversă conductivităţii, numită rezistivitate şi se notează cu simbolul ρ utilizat pentru densitate volumică de sarcină.

$$\rho = \frac{1}{\gamma} \tag{5.30}$$

5.3.2 Legea lui Ohm sub formă integrală. Rezistenţa şi conductanţa unui conductor.

a) Rezistenţa electrică a unui tub de curent

Ne propunem să determinăm curentul total I, care străbate o porţiune dintr-un conductor, în funcţie de diferenţa de potenţial dintre două secţiuni

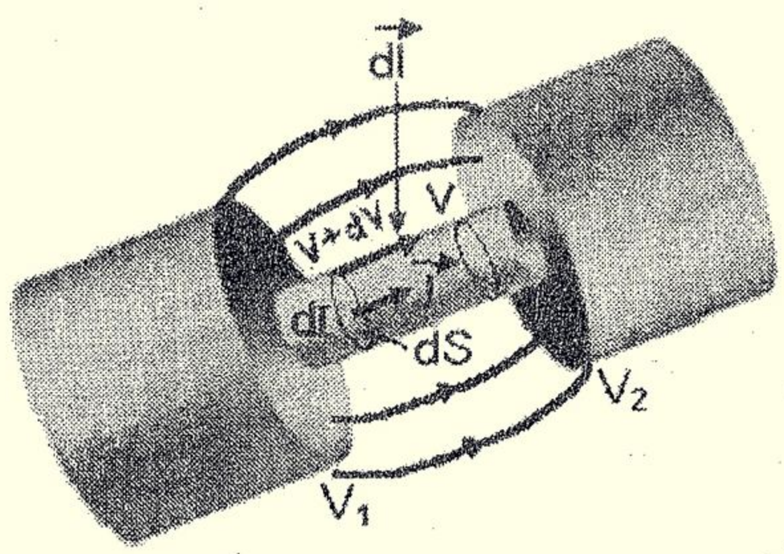


Figura 5.7: Rezistenţa electrică a unei porţiuni de conductor cuprinsă între două suprafeţe echipotenţiale V_1 şi V_2

transversale S_1 şi S_2. Efectiv, acestea sunt două suprafeţe echipotenţiale aflate la potenţialele V_1 şi V_2, (Fig. 5.7), cu $V_1 > V_2$. Orice tub elementar de curent de secţiune dS, cuprins între aceste suprafeţe echipotenţiale, va fi străbătut de un curent dI astfel încât curentul total prin întreaga secţiune S a conductorului este reprezentat prin suma tuturor curenţilor elementari, $I = \int_S \vec{J} \cdot \overrightarrow{dS}$. Pentru a calcula acest curent vom considera mai întâi un volum elementar dintr-un tub de curent, a cărui lungime $\overrightarrow{dl}$ este cuprinsă între două secţiuni drepte dS aflate la potenţialele $V + dV$ şi V. În orice punct din acest volum elementar, vectorul densitate de curent se supune legii lui Ohm locale, $\vec{J} = \gamma \vec{E}$. Câmpul electric fiind $E = -\frac{dV}{dl}$, şi prin definiţie $J = \frac{dI}{dS}$, legea lui Ohm locală poate fi scrisă într-o formă elementară care exprimă direct relaţia dintre curentul electric şi diferenţa de potenţial:

$$-dV = \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} = \frac{1}{\gamma} \vec{J} \cdot \overrightarrow{dl} = dI \frac{dl}{\gamma dS} \tag{5.31}$$

Pentru întregul tub cuprins între echipotenţialele V_1 şi V_2, în care curentul dI este constant, obţinem prin integrare relaţia:

$$\frac{V_1 - V_2}{dI} = \int_1^2 \frac{dl}{\gamma dS} \tag{5.32}$$

Membrul al doilea al acestei egalităţi este o mărime constantă care depinde de configuraţia geometrică a conductorului şi de conductivitatea materialului. Numim această mărime *rezistenţa electrică* r *a tubului de curent*,

$$r = \int_1^2 \frac{dl}{\gamma dS} \tag{5.33}$$

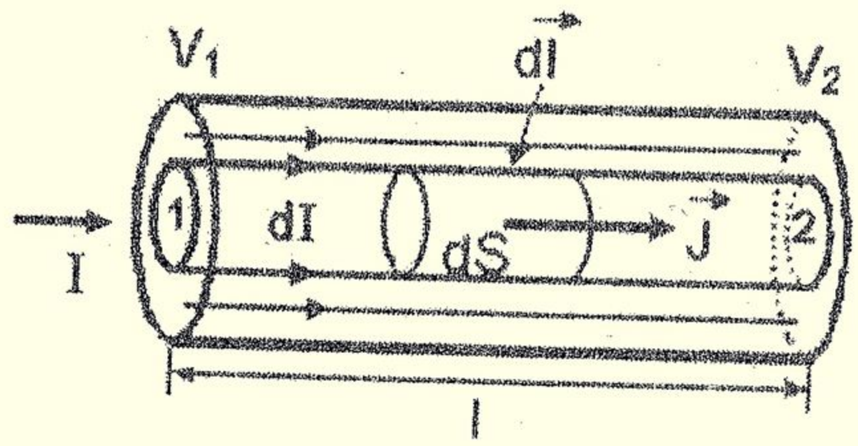


Figura 5.8: Tub de curent într-o porţiune dintr-un conductor cilindric

b)Rezistenţa unui conductor omogen de secţiune uniformă

În cazul unui conductor omogen, de secţiune uniformă S, de lungime l, aflat în circumstanţe fizice care asigură o conductivitate γ constantă, secţiunea dS a fiecărui tub de curent este aceeaşi pe toată lungimea conductorului (Fig. 5.8). În aceste condiţii, rezistenţa tubului Tub dc curent într-o porţiune dintr-un conductor cilindric omogen cuprins între echipotenţialele V_1 şi V_2 apare ca o sumă a rezistenţelor elementelor de lungime dl *"în serie"*:

$$r = \frac{1}{\gamma dS}\int dl = \frac{l}{\gamma dS}$$

c) Legea lui Ohm sub formă integrală. Rezistenţa electrică

Să observăm acum (Fig. 5.8) că, în conductor, toate tuburile de curent dI sunt juxtapuse *"în paralel"* între aceleaşi echipotenţiale V_1 şi V_2, curentul total I apare evident ca o sumă a tuturor curenţilor dI:

$$I = \int dI = (V_1 - V_2)\int_S \frac{\gamma dS}{l} = \frac{V_1 - V_2}{\frac{l}{\gamma S}} = \frac{V_1 - V_2}{R}$$

de unde relaţia,

$$V_1 - V_2 = RI \tag{5.34}$$

în care

$$R = \frac{l}{\gamma S} = \rho \tag{5.35}$$

$\frac{l}{S}$ reprezintă *rezistenţa electrică* a porţiunii de conductor aflată între echipotenţialele V_1 şi V_2. Din această relaţie se poate defini *rezistivitatea* $\rho = R(S/l)$ *ca fiind o mărime numeric egală cu rezistenţa unui conductor omogen a cărui lungime este de 1 m şi secţiunea de 1* m^2.

Relaţia (6.34) reprezintă l*egea lui Ohm sub formă integrală* pentru o porţiune de circuit şi ea exprimă faptul că intensitatea curentului I, care circulă printr-un conductor, este proporţională cu tensiunea $U = V_1 - V_2$ aplicată la extremităţile sau la bornele conductorului, factorul de proporţionalitate fiind R .

Inversul rezistenţei totale, $1/R$, se numeşte *conductanţă* şi se notează cu simbolul G. Conductanţa porţiunii de conductor considerată aici apare ca suma inverselor rezistenţelor r ale tuturor tuburilor de curent aflate în paralel între aceleaşi echipotenţiale:

$$G = \frac{1}{R} = \sum \frac{1}{r} \qquad sau \qquad G = \int_S \frac{dS}{\int_1^2 \frac{dl}{\gamma}} = \int_S \frac{\gamma}{l} dS = \frac{1}{\frac{l}{\gamma S}} = \frac{1}{R} \qquad (5.36)$$

Conductivitatea $\gamma = G\,(l/S)$ este o mărime numeric egală cu conductanţa unui conductor omogen a cărui lungime este de 1 m şi secţiunea de 1 m^2.

5.3.3 Definiţii şi Unităţi

Unitatea de rezistenţă electrică $R = U/I$ este volt pe amper (V/A) şi se numeşte ohm (Ω). *Un ohm este rezistenţa unui conductor la bornele căruia apare o diferenţă de potenţial de 1V ând acesta este parcurs de un curent de 1A.*

Unitatea de *conductanţă* $G = I/U$ este un *amper pe volt* (A/V) şi se numeşte siemens (S). Uneori este numită invers-ohm sau *mho* (Ω^{-1}). *Un siemens este conductanţa unui conductor care lasă să treacă un curent de un amper ând tensiunea de la bornele lui este de un volt.*

Unitatea de *conductivitate* $\gamma = J/E$ este *amper pe (volt × metru)*, sau, cu $\gamma = l/RS$, siemens pe metru (S/m) sau $(\Omega.\mathrm{m})^{-1}$ şi *reprezintă conductanţa unui conductor omogen cu lungimea de 1m şi cu secţiunea de 1m^2 care, supus unei diferenţe de potenţial de 1V, lasă să treacă un curent de 1A.*

Unitatea de *rezistivitate*, $\rho = 1/\gamma$, este *volt × metru pe amper* (V.m/A), sau *ohm×metru* (Ω.m), şi *reprezintă rezistenţa unui conductor omogen cu lungimea de 1m şi cu secţiunea de 1m^2 care, parcurs de un curent de 1A, capătă o tensiune de 1V între extremităţile sale.*

5.3.4 Rezistivitatea şi conductivitatea materialelor uzuale

Valorile rezistivităţii se etalează între 10^{-8} Ω.m pentru cele mai bune materiale conductoare şi 10^{18} Ω.m pentru cei mai buni izolanţi. Între acestea

se situează materialele semiconductoare a căror rezistivitate se etalează între 10^{-4} şi 10^{6} Ω.m, cum se poate aprecia din valorile date în Tabelul alăturat.

TABEL

Rezistivitatea, conductivitatea şi coeficientul de temperatură al diferitelor materiale la temperatura ambiantă (20°C)

Material	Rezistivitate $\rho(\Omega.m)^{-1}$	Conductivitate $\sigma(\Omega.m)^{-1}$	Coeficient de temperatură $\alpha(^oC)^{-1}$
Argint	$1{,}59.10^{-8}$	$6{,}29.10^{7}$	$3{,}8.10^{-3}$
Cupru pur	$1{,}629.10^{-8}$	$5{,}91.10^{7}$	$3{,}9.10^{-3}$
Cupru trefilat	$1{,}73.10^{-8}$	$5{,}77.10^{7}$	
Aur	$2{,}44.10^{-8}$	$4{,}10.10^{7}$	$3{,}4.10^{-3}$
Aluminiu	$2{,}824.10^{-8}$	$3{,}53.10^{7}$	$3{,}9.10^{-3}$
Wolfram	$5{,}6.10^{-8}$	$1{,}79.10^{7}$	$4{,}5.10^{-3}$
Alama	$7{,}0.10^{-8}$	$1{,}43.10^{7}$	2.10^{-3}
Bronz	$1{,}8.10^{-7}$	$5{,}6.10^{6}$	5.10^{-3}
Fier	$2{,}1.10^{-7}$	$4{,}8.10^{6}$	5.10^{-3}
Plumb	$2{,}2.10^{-7}$	$4{,}5.10^{6}$	$4{,}3.10^{-3}$
Manganin	$4{,}4.10^{-7}$	$2{,}28.10^{6}$	6.10^{-6}
Constantan	$4{,}9.10^{-7}$	$2{,}04.10^{6}$	2.10^{-6}
Mercur	$9{,}58.10^{-7}$	$1{,}04.10^{6}$	$8{,}9.10^{-3}$
Cromnichel	$1{,}1.10^{-6}$	9.10^{5}	4.10^{-4}
Grafit	5.10^{-5}	2.10^{4}	-5.10^{-4}
Apă de mare	0,3	3	
Pământ	$10^{2} - 10^{4}$	$10^{-4} - 10^{-2}$	
Apă distilată	$1\text{-}5.10^{4}$	$1\text{-}2.10^{-5}$	
Ulei de transformator	$10^{10} - 10^{11}$	$10^{-11} - 10^{-10}$	
Sticla	$10^{12} - 10^{15}$	$10^{-15} - 10^{-12}$	
Mica	$10^{14} - 10^{16}$	$10^{-16} - 10^{-14}$	
Porţelan	10^{16}	10^{-16}	
Cuarţ topit	10^{18}	10^{-18}	
Chihlimbar	5.10^{18}	2.10^{-19}	

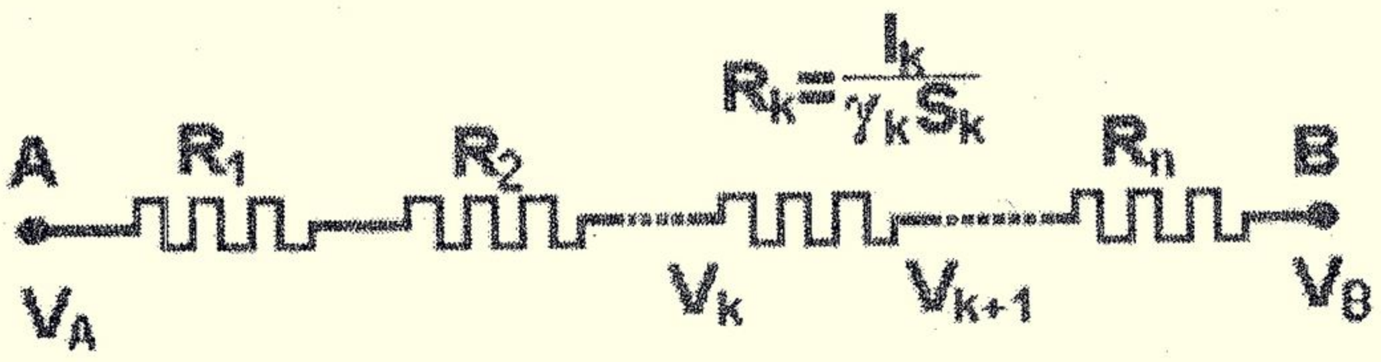


Figura 5.9: Rezistori conectaţi în serie

5.3.5 Grupări de rezistenţe

Se poate obţine orice valoare a rezistenţei unei porţiuni de circuit, aflate sub o diferenţă de potenţial dată, conectând la acea diferenţă de potenţial un grup de rezistori legaţi convenabil în serie sau în paralel sau o într-o combinaţie de serie şi paralel.

În mod frecvent pentru a distinge un rezistor dintr-o grupare de mai mulţi rezistori se utilizează semnul:

a. Gruparea rezistorilor în serie

O generalizare a relaţici (6.34) poate fi făcută considerând că mediul conductor dintre două suprafeţe echipotenţiale V_1 şi V_2, este alcătuit dintr-o succesiune continuă de materiale diferite, (Fig. 5.9), fiecare dintre acestea constituind un rezistor caracterizat prin conductivitatea γ_k, secţiunea S_k şi lungimea l_k. În virtutea proprietăţii de ne-acumulare de sarcini la suprafaţa conductorilor în regim de curent constant, curentul electric I este acelaşi prin fiecare dintre rezistorii conectaţi în serie între potenţialele V_A şi V_B. Notând cu $V_k - V_{k+1}$ diferenţa de potenţial de la extremităţile rezistorului de lungime l_k şi apliând legea lui Ohm integrală pentru fiecare dintre cele n porţiuni de circuit de lungime l_k legate în serie şi ţinând totodată seama de faptul că intensitatea I este aceeaşi în fiecare dintre acestea, se poate scrie relaţia:

$$I = \frac{V_k - V_{k+1}}{\frac{l_k}{\gamma_k S_k}} = \frac{V_k - V_{k+1}}{R_k} = \frac{\sum_1^n (V_k - V_{k+1})}{\sum_1^n R_k} = \frac{V_A - V_B}{\sum_1^n R_k}$$

în care $V_A = V_1$ şi $V_B = V_{n+1}$. Raportul $(V_A - V_B)/I$ reprezintă *rezistenţa totală* R, *a celor* n *rezistori legaţi în serie. Rezultă astfel că, rezistenţa totală*

a n rezistori conectaţi în serie este egală cu suma rezistenţelor acestora:

$$\frac{V_A - V_B}{I} = R = \sum_1^n R_k \tag{5.37}$$

b. Gruparea rezistorilor în paralel

Consideraţiile făcute în paragraful 6.3.2.c, relativ la rezistenţa totală a tuburilor de curent juxtapuse în paralel între două echipotenţiale V_1 şi V_2, pot fi extinse pentru un sistem de n conductori omogeni care, conectaţi în paralel între aceleaşi două potenţiale (Fig. 5.10), au conductivităţi γ_k, lungimi l_k şi (Fig. 5.10). Rezistori conectaţi în paralel secţiuni S_k diferite. Pentru aceasta vom exprima mai întâi curentul I_k prin fiecare dintre aceşti conductori,

$$I_k = \frac{V_1 - V_2}{\frac{l_k}{\gamma_k S_k}} = \frac{V_1 - V_2}{R_k}$$

şi apoi curentul total I prin toţi cei n conductori,

$$I = \sum_1^n I_k = (V_1 - V_2) \sum_1^n \frac{1}{R_k}$$

În conformitate cu această relaţie, *inversul rezistenţei totale, $(1/R)$, a grupului de n rezistori conectaţi în paralel, sub aceeaşi diferenţă de potenţial, este egal cu suma inverselor rezistenţelor*

$$\frac{1}{R} = \frac{I}{V_1 - V_2} = \sum_1^n \frac{1}{R_k} \tag{5.38}$$

Cu alte cuvinte, conductanţa rezultantă $G = (1/R)$ este suma conductanţelor componente:

$$G = \sum\nolimits_{k=1}^{n} G_k. \tag{5.39}$$

5.3.6 Aplicaţii ale conexiunilor serie şi paralel

Dintre numeroasele aplicaţii reţinem aici numai âteva referitoare la extinderea domeniului de măsurare al unor instrumente electrice uzuale

a) Extinderea domeniului de măsurare al unui instrument de măsură a curentului

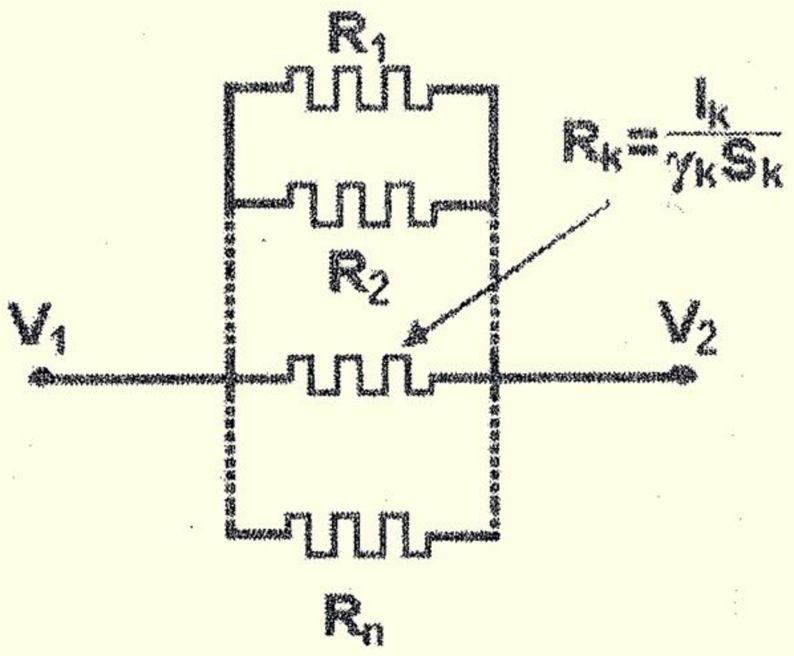


Figura 5.10:

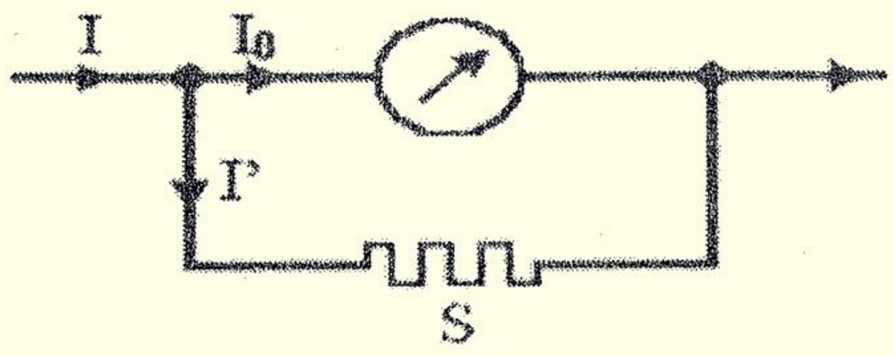


Figura 5.11: Şuntarea unui instrument de măsură a curentului

În situaţiile în care curentul I, care se măsoară într-un circuit, este mai mare deât curentul maxim I_0 care poate fi măsurat de un instrument de măsură (ampermetru), o parte I' din curentul I este deviat printr-o rezistenţă, numită *şunt*; aceasta este conectată în paralel cu ampermetrul (Fig. 5.11). Apliând legile lui Kirchhoff se poate determina valoarea rezistenţei de şunt pentru care curentul I de măsurat este de m ori mai mare deât curentul maxim I_0 suportat de ampermetru:

$$m = \frac{I}{I_0} \tag{5.40}$$

Particularizând aceste legi în cazul şuntului avem următoarele relaţii :

$$\begin{aligned} I &= I_0 + I' \\ r_a I &= sI' = s(I - I_0) \end{aligned}$$

de unde

$$s = \frac{r_a}{m-1} \tag{5.41}$$

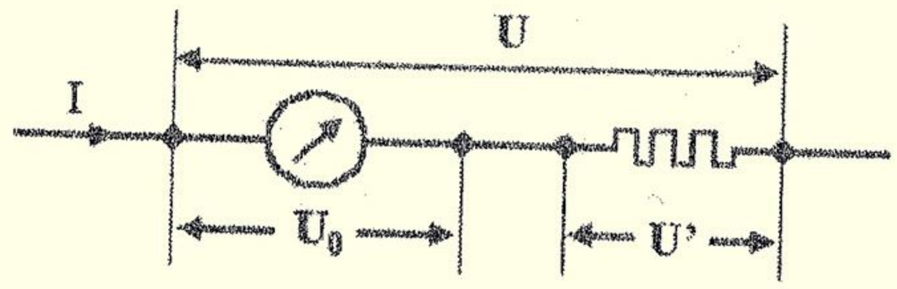


Figura 5.12: Extinderea domeniului de măsură al unui voltmetru

în care r_a reprezintă rezistenţa proprie a ampermetrului.

b) Extinderea domeniului de măsurare al unui instrument de măsură a tensiunii

În situaţiile în care tensiunea U, care se măsoară într-un circuit, este mai mare decât trnsiunea maximă U_0 care poate fi măsurată de un instrument de măsură (voltmetru), o anumită parte U' din tensiunea U este preluată de o rezistenţă r conectată în serie cu voltmetrul, (Fig. 5.12). Se poate determina valoarea rezistenţei adiţionale r pentru care tensiunea U de măsurat este de n ori mai mare deât tensiunea maximă U_0 pentru care a fost construit voltmetrul:

$$n = \frac{U}{U_0} \tag{5.42}$$

Curentul maxim prin voltmetru fiind $I = U_0/r_v$, se poate scrie relaţia:

$$I = \frac{U_0}{r_v} = \frac{U}{r + r_v}$$

din care, ţinând seama de (6.42) obţinem în final valoarea rezistenţei adiţionale

$$r = r_v(n - 1).$$

5.4 Dependenţa rezistivităţii de diferiţi factori

Rezistivitatea este o mărime care depinde nu numai de natura materialului dar în acelaşi timp ea poate să se modifice sub acţiunea unor factori fizici exteriori, dintre care în mod deosebit temperatura. Există posibilitatea ca rezistivitatea să se anuleze sub o anumită temperatură, materialul căpătând în aceste circumstanţe o stare electrică specială numită *supraconductibilitate*. Rezistivitatea poate să se modifice uneori sensibil în prezenţa radiaţiilor electromagnetice, a luminii în particular, sau în prezenţa câmpului

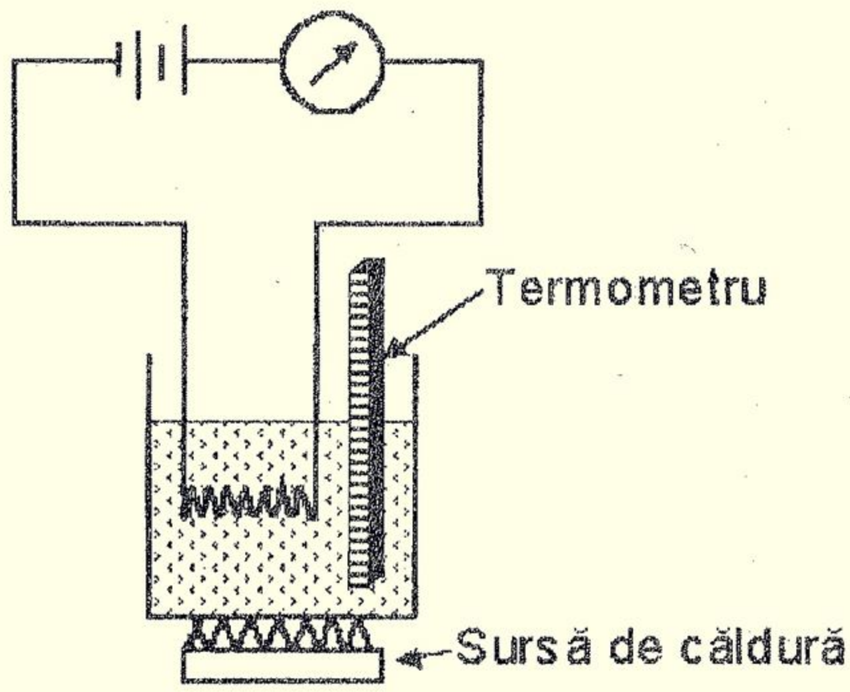


Figura 5.13: *Schema experimentului pentru observarea dependenţei de temperatură a rezistivităţii metalelor*

magnetic. Materialele care prezintă net aceste efecte de *fotorezistenţă*, respectiv *magnetorezistenţă* au permis în ultima vreme aplicaţii specta- culoase în calitate de sensori optici sau magnetici. Actualmente numeroase materiale realizate în condiţii tehnologice speciale prezintă efecte de "*magnetorezistenţă gigant*".

5.4.1 Dependenţa rezistivităţii de temperatură

Alura variaţiei termice a rezistivităţii este diferită în cazul metalelor conductoare faţă de cel al materialelor semiconductoare.

a) *Variaţia rezistivităţii metalelor cu temperatura.* În cazul metalelor conductoare, o creştere a temperaturii determină o creştere a amplitudinii de vibraţie a ionilor din reţeaua cristalină şi implicit o creştere a numărului de şocuri ale electronilor cu ionii reţelei. În aceste condiţii este de aşteptat o creştere a rezistivităţii cu temperatura, cum de altfel se observă experimental. Schema experienţei este indicată în (Fig. 5.13). Un fir subţire de fier sub formă de spirală, în serie cu o sursă de curent şi cu un instrument sensibil pentru măsurarea curentului, este supus unei încălziri de la o sursă de căldură exterioară. Se constată că, prin încălzire, curentul indicat de instrument se micşorează, fapt datorat creşterii rezistenţei firului metalic. Se constată în general că, în domeniul temperaturilor nu prea îndepărtate de temperatura ambiantă (de exemplu 0°C-100°C, (Fig. 5.14))), variaţia termică a rezistivităţii este practic liniară şi poate fi exprimată printr-o lege de

forma

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha t) \tag{5.43}$$

în care ρ_0 reprezintă rezistivitatea conductorului la $t = 0$ °C şi α este un coeficient de temperatură. În domeniul temperaturilor menţionate mai sus, α este constant, dar pentru temperaturi superioare valoarea coeficientului α depinde de temperatură şi legea de variaţie termică a rezistivităţii devine neliniară.

În cazul metalelor pure, valoarea coeficientului α, la temperaturi apropiate de temperatura ambiantă, este sensibil egală cu valoarea coeficientului de dilatare al gazelor perfecte, $\alpha \approx \frac{1}{273} \approx 0,004$, aşa cum se poate observa în Tabelul 1. În cest caz se poate exprima variaţia termică a rezistivităţii în funcţie de temperatura absolută T sub forma următoare:

$$\rho = \frac{\rho_0}{273} (t + 273) = AT \tag{5.44}$$

în care A este o constantă.

În cazul aliajelor, coeficientul de temperatură α este inferior celui al metalelor. Aceasta se poate observa direct din datele Tabelului de mai sus; în cazul aliajelor de manganin (86%Cu,12%Mn,2%Ni) α =6.10^{-6}, constantan (60%Cu,40%Ni) α =2.10^{-6}. Aceste aliaje se folosesc la realizarea rezistenţelor etalon a căror valoare nu trebuie să se modifice în condiţiile variaţiilor de temperatură. Un aliaj de Cr-Au are un coeficient de temperatură practic nul.

b) *Starea supraconductoare*

În general, prin coborîrea temperaturii, rezistivitatea metalelor se micşorează, atingând în domeniul temperaturilor foarte joase o valoare o valoare limită, diferită de la un material la altul şi mai slabă dacă metalul este mai pur. S-a observat însă la o serie de materiale că, în domeniul tempe- raturilor foarte joase există o anumită temperatură critică T_c la care rezistenţa se micşorează brusc sub orice valoare măsurabilă, devenind practic nulă (Fig. 5.14) Acest fenomen, care a căpătat denumirea de *supraconductibilitate*, a fost descoperit de Kammerlingh Onnes în 1911. Un număr de 23 elemente chimice posedă proprietăţi supraconductoare evi- dente: Al, Ti, V, Zn, Ga, Zr, Nb, Tc, Ru, Cd, In, Sn, La, Hf, Ta, Re, Os, Hg, Tl, Pb, Bi Th, U; de asemenea şi o serie de aliaje şi de compuşi chimici, care uneori sunt constituiţi din elemente care nu prezintă supraconductibilitate. Temperatura T_{cr} de tranziţie în starea supraconductoare depinde de natura materialului,. Acest fenomen remarcabil a rămas mult timp, de la descoperirea lui,

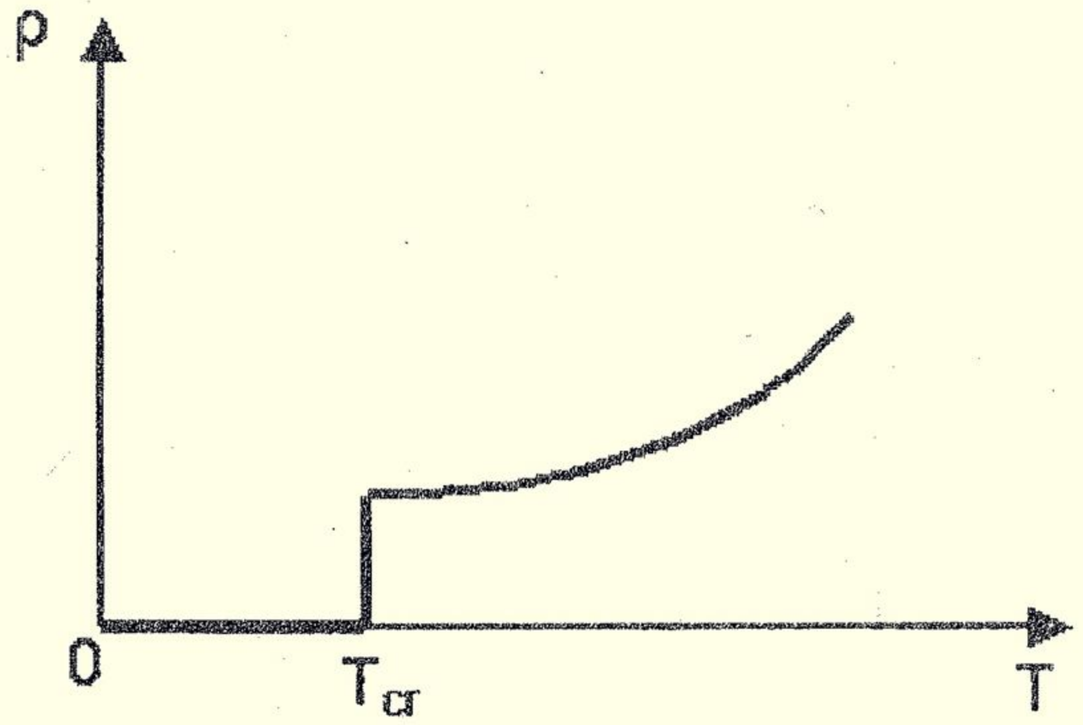
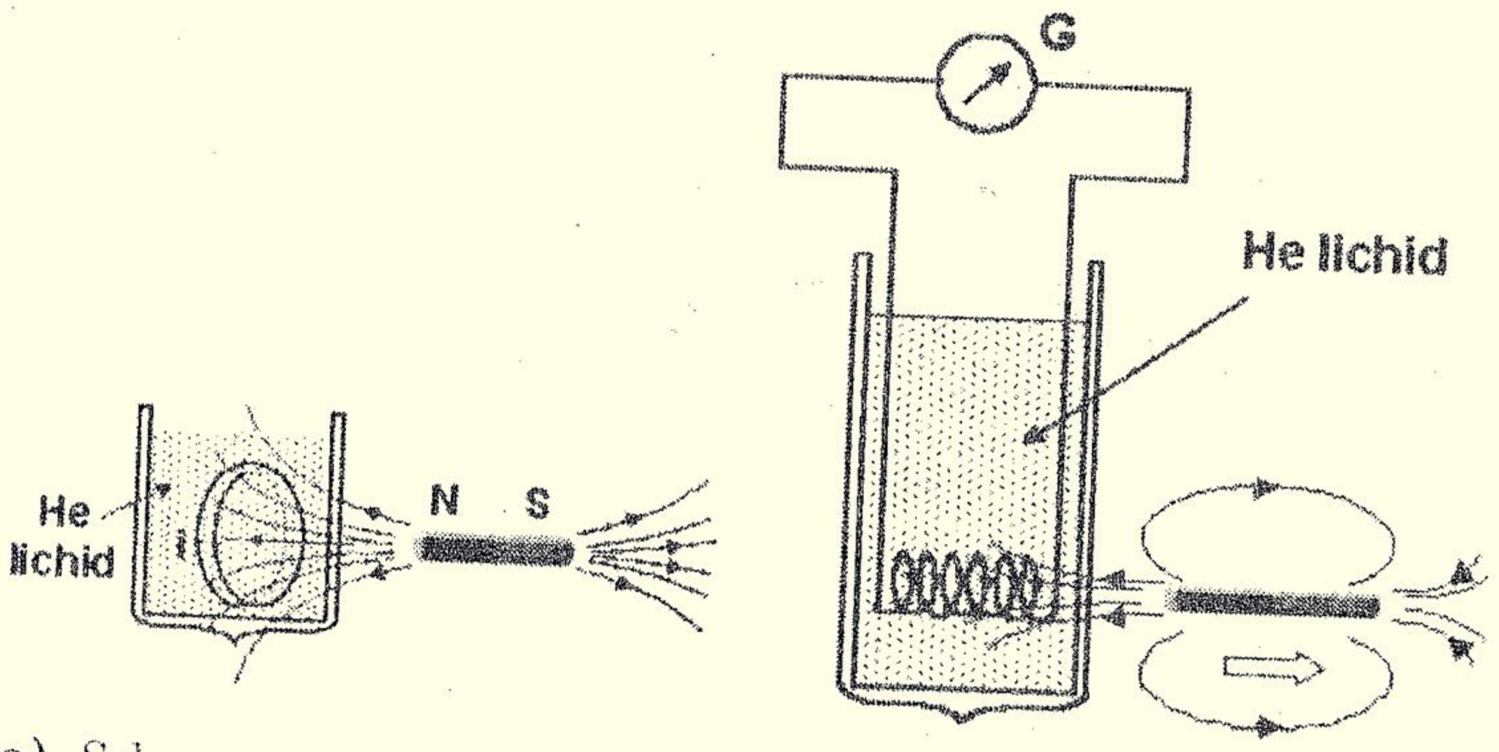


Figura 5.14: Variaţia termică a rezistivităţii în domeniul temperaturilor foarte joase.Tranziţia la starea supraconductoare.

fără aplicaţii deosebite, în special datorită valorilor foarte mici (apropiate de 0K) ale temperaturilor de tranziţie şi condiţiilor criogenice pretenţioase. Până in 1986 (după 75 de ani de la descoperirea fenomenului) valorile T_{cr} determinate la diferite materiale abia depăşeau $20 - 25K$. Începând cu 1987 interesul pentru studiul supraconductibilităţii a crescut brusc, acesta fiind suscitat îndeosebi de realizarea unor compuşi oxidici pe bază de cupru de tipul $R - Ba - Cu - O$, (R find unul dintre elementele pământurilor rare), ale căror temperaturi de tran- ziţie depăşesc considerabil temperatura azotului lichid (77K). Prin 1994 s-a determinat valoarea T_{cr} pentru un supraconductor cu formua chimică $HgBa_2Ca_2Cu_3O_8$.

Evoluţia în timp a descoperirii materialelor cu temperaturi T_{cr} de tranziţie la starea supraconductoare mai ridicate În starea supraconductoare substanţele posedă proprietăţi deosebit de interesante:

1) *Un curent electric provocat într-un circuit supraconductor se poate menţine un timp foarte îndelungat (de ordinul zecilor şi sutelor de ore), în absenţa oricărei surse de curent.* În experienţa lui Kamerlingh Onnes, un circuit închis constituit dintr-un tub subţire umplut cu mercur, întrodus într-un recipient cu heliu lichid, este răcit la temperatura de $4,2K$ la care mercurul devine supraconductor. Provoând o variaţie de câmp magnetic prin suprafaţa acestui circuit, ia naştere în circuit, prin inducţie electromagnetică, un curent electric indus. Prezenţa acestui curent este indicată de deviaţia unui ac magnetic suspendat în vecinătatea circuitului supraconductor (Fig. ??).



(a) Schema experienţei lui Kamerlingh Onnes:(1) producerea curentului indus i cauzată de variaţia câmpului magnetic pe durata înlăturării magnetului N-S, (2) deviaţia α a acului magnetic datorată curentului indus persistă după înlăturarea magnetului N-S.

(b) Variantă a acestui experiment

Figura 5.15: Schema experienţei lui Kamerlingh Onnes

Se constată â acest curent, care în condiţiile normale dispare odată cu încetarea variaţiei câmpului magnetic, se menţine în circuit chiar şi după 96 de ore. Aceasta, datorită faptului că, în stare supraconductoare, timpul τ de relaxare a curentului, (timpul după care curentul I_0 se micşorează de e ori, $I = I_0/e = 0,37I_0$)este considerabil dat fiind că $\tau = L/R$ şi $R \approx 0$. O variantă a experimentului care demonstrează că un curent trimis într-un supraconductor dispare după un timp foarte indelungat, este dată în (Fig. ??): Circuitul supraconductor, S, introdus în recipientul umplut cu heliu lichid, este conectat în serie cu un galvanometru. Acesta este scurtcircuitat în punctele 1, 2 printr-un fir care este şi el în stare supraconductoare. Astfel, curentul excitat prin inducţie electromagnetică străbate circuitul fără a trece prin galvanometru şi acesta nu indică nici o deviaţie. După un timp de la producerea curentului indus, se taie firul conectat între punctele 1, 2, şi se constată că galvanometrul indică o deviaţie; această deviaţie este de scurtă durată deoarece prin circuitul galvanometrului, situat în exteriorul recipientului de răcire , rezistenţa circuitului nu este nulă ($R_{ext} \neq 0$).

2) *Supraconductibilitatea dispare în prezenţa câmpurilor magnetice pu-*

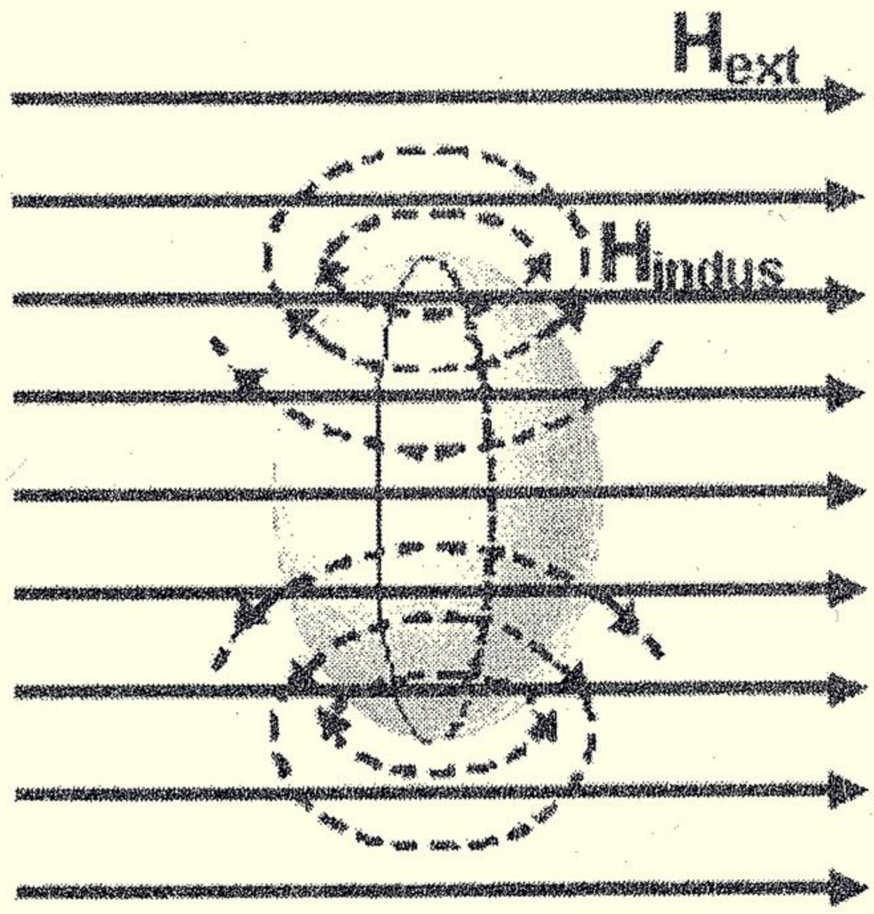


Figura 5.16: Corp supraconductor într-un câmp magnetic.

ternice exterioare sau a câmpului magnetic provocat de însuşi curentul care trece prin supraconductor dacă drensitatea acestui curent este suficient de mare. Câmpul magnetic, atât timp ât mărimea lui, nu atinge o valoare limită H_k pentru care dispare supraconductibilitatea, nu pătrunde în interiorul supraconductorului, cu excepţia numai a unui strat superficial foarte subţire. De aceea supraconductorul se comportă ca un diamagnetic ideal; liniile de câmp magnetic îl înconjoară fără a pătrunde în interiorul lui (Fig. 5.16.

3) *Trecerea în starea supraconductoare este însoţită de o variaţie bruscă a căldurii specifice şi de o modificare a conductivitatăţii termic.* Tranziţia la starea supraconductoare, având loc fără o modificare structurală a materialului, este o *tranziţie de speţa a doua.*

In teoria elementară supraconductibilitatea, este considerată ca o mişcare a electronilor în reţeaua cristalină, fără ciocniri între ei sau cu atomii reţelei. Toţi electronii de conducţie se deplasează ca într-un flux de lichid ideal fără vâscozitate, neinteracţionând între ei sau cu reţeaua, adică fără frecare. De aceea rezistenţa electrică a supraconductorului este nulă. Un câmp magnetic puternic, pătrunzând în supraconductor, provoacă deviaţia electronilor; distrugându-se astfel curgerea "laminară " a fluxului de electroni, apar ciocniri între electroni şi reţea, determinând apariţia rezistenţei electrice. Particularităţile supraconductorilor cu temperaturi critice ridicate au antrenat noi cercetări experimentale şi teoretice ale căror rezultate au

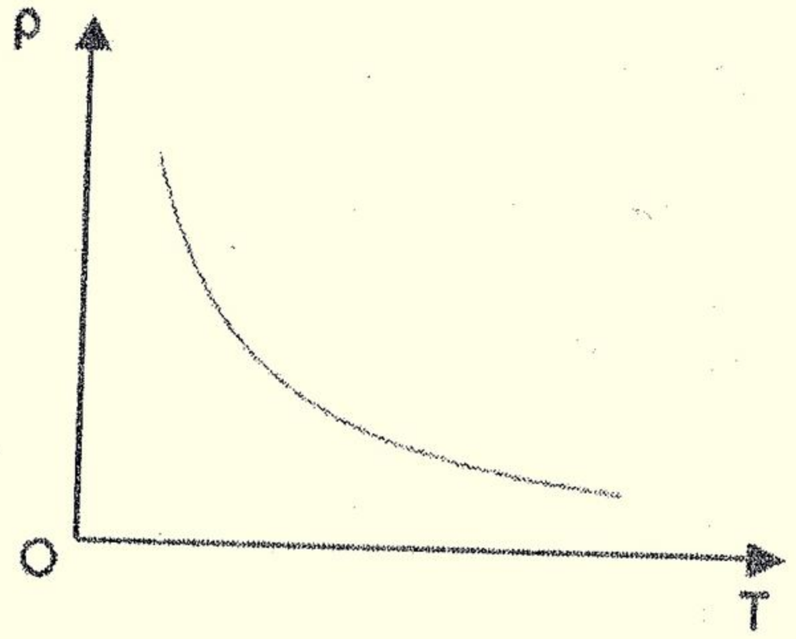


Figura 5.17: Alura variaţiei termice a rezzistivităţii semiconductorilor

adus alte trei premii Nobel pe lângă cel acordat lui Kammerlingh Onnes (1913)ş: Astfel, J.Bardeen, L.Cooper, R.Schrieffer, (în 1972) pentru teoria BCS a semiconductibilităţii, B.Josephson, L.Esaki, J.Giaever (1973) pentru efectul de tunelare şi J.G.Bednorz, K.A.Müller (1987) pentru descoperirea supraconductibilităţii cu temperatură critică ridicată.

c) *Variaţia rezistivităţii semiconductorilor cu temperatura*

În cazul materialelor semiconductoare, rezistivitatea este o funcţie descrescătoare de temperatură, de alură exponenţială (Fig. 5.12), de forma

$$\rho = Ae^{\frac{B}{T}} \tag{5.45}$$

în care A şi B sunt constante pozitive caracteristice materialului. Variaţii slabe de temperatură pot antrena variaţii importante ale rezistivităţii.

Proprietăţi semiconductoare pot fi întâlnite la o serie de elemente din coloanele IV (Si,Ge...), şi VI (Se, Te...) ale tabelului periodic, sau la combinaţii stoechiometrice saturate alcătuite din elemente din coloanele III şi V (In-Sb, Ga-As...) care au structuri electronice apropiate de cele ale Si, precum şi la o serie de compuşi cum sunt sulfurile, selenurile şi telururile de cadmiu şi de plumb, (CdS, CdSe, CdTe, PbS, PbSe, PbTe), şi la o serie de oxizi de cupru şi de zinc, (Cu_2O, ZnO).Mecanismul conducţiei în materialele semiconductoare precum şi proprietăţile acestora vor fi examinate mai detaliat în Cap.10.

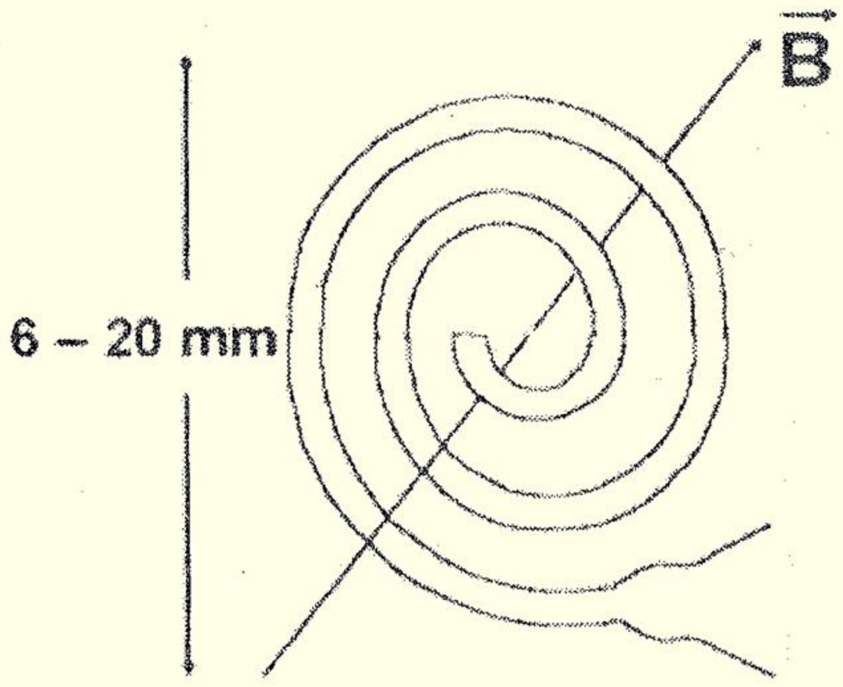


Figura 5.18: a) Spirala dublă de bismut. b)Variaţia relativă a rezistivităţii bismutului cu inducţia magnetică

5.4.2 Dependenţa rezistivităţii de intensitatea câmpului magnetic. Magnetorezistenţă

Rezistenţa unor conductori se modifică în prezenţa unui câmp magnetic. Acest efect este cunoscut sub denumirea de *magnetorezistenţă*. Rezistivitatea bismutului, la o temperatură dată, variază sensibil cu câmpul magnetic în care este plasat. Se constată că, dacă R_0 este rezistenţa unei spirale de bismut în absenţa câmpului magnetic, şi R rezistenţa sa în prezenţa unui câmp magnetic H, raportul $\frac{R-R_0}{R_0} = \frac{\rho-\rho_0}{\rho_0}$ creşte practic linear cu câmpul în domeniul câmpurilor relativ intense, depăşind $10^5 A/m$. De exemplu, cu $R_0 = 20\Omega$, într-un câmp de $10^6 A/m$, variaţia absolută a rezistenţei este $R - R_0 = 6\Omega$. În circuitele de măsură sensibile (puntea lui Wheatstone) această variaţie a rezistenţei poate fi măsurată cu erori neglijabile, de ordinul miimilor de ohm. (Fig. ??) reprezintă o dublă spirală de bismut, care este prinsă între două plăci de mica; ansamblul având o grosime mai mică de $2mm$ şi un diametru al spiralei de $6 - 20mm$ poate fi introdus cu uşurinţă într-un întrefier relativ îngust, servind astfel ca o sondă pentru măsurarea inducţiei magnetice. (Fig. ??) dă alura variaţiei relative a rezistenţei bismutului în funcţie de inducţia magnetică B, aceasta fiind dirijată perpendicular pe suprafaţa spiralei..Legea de variaţie a rezistivităţii, la început pătrati- că, devine repede lineară în funcţie de B. Explicaţia acestui fenomen este în relaţie directă cu modificarea traiectoriei electronilor de conducţie în prezenţa unui câmp magnetic.

În conductorii feromagnetici masivi, contribuţia principală la magneto-

rezistenţă este datorată dependenţei rezistenţei electrice de anizotropia magnetică, fenomen descoperit în 1857 de W.Thomson (Lord Kelvin). Fenomenul îşi are originea în interacţiunile spin-orbită ale electronilor, care conduc la o rezistivitate diferităând curentul electric prin conductorul feromagnetic este paralel sau perpendicular pe direcţia de magnetizare. Când se aplică un câmp magnetic, domeniile elementare de magnetizare, preexistente într-un feromagnetic, şi dezorientate iniţial, tind să-şi alinieze magnetizarea lor în direcţia câmpului aplicat, provoând totodată o modificare de ordinul câtorva procente a rezistenţei electrice.

Efectele magnetorezistive sunt de mare interes în aplicaţiile industriale; magnetorezistenţa anizotropică (AMR) a fost aplicată pentru realizarea de sensoril magnetici şi de capete de înregistrare pentru discuri magnetice.

Până în 1988, după ce s-au scurs 130 de ani de la descoperirea AMR, nu se întrevedeau aplicaţii mai spectaculoase, când Albert Fert şi Peter Grünberg, independent unul de altul, descoperă că un efect magnetorezistiv mult mai mare "giant magnetoresistance" (GMR) poate fi obţinut cu multistraturi subţiri feromagnetice. Aceste sisteme constau esenţialmente din materiale feromagnetice (Fe, Co, Ni,...şi aliajele lor) şi materiale neferomagnetice (Cr, Cu, Ru etc.) grosimea fiecărui strat fiind de ordinul grosimii âtorva straturi de atomi. Fert şi Grünberg descoperă că, dacă, prin aplicarea unui câmp magnetic exterior, orientarea relativă a magnetizării straturilor succesive este modificată de la direcţia paralelă la direcţia antiparalelă, rezistenţa electrică a sistemului de multistraturi iniţial orientate între ele antiparalel, se micşorează cu mai mult de 50% cum s-a reprezentat schematic în (Fig. 5.19)

Fenomenul GMR rezultă dintr-o combinaţie de două noi efecte fizice distincte: Primul dintre ele este faptul că rezistenţa electrică a multistratului variază considerabil după cum configuraţia este comutată din direcţia paralelă (P) în cea anutiparalelă (AP). Acest efect apare ca o consecinţă a împrăştierii de spin a electronilor în straturile feromagnetice, efect studiat intens de Fert, în anii '70, în feromagneticii masivi şi în aliaje feromagnetice (Fig. 5.20). Al doilea efect nou important este cuplajul de schimb antiferomagnetc la interfaţa dintre straturi, descoperit de P.Grünberg în 1986, care conduce la o orientare antiparalelă a magnetizării în straturile succesive în absenţa câmpului magnetic exterior.

Acest efect permite ca, prin aplicarea câmpului magnetic, o configuraţie antiparalelă (AP) să fie comutată într-o configuraie paralelă (P), favorizând astfel apariţia fenomenului de magnetorezistenţă gigant.

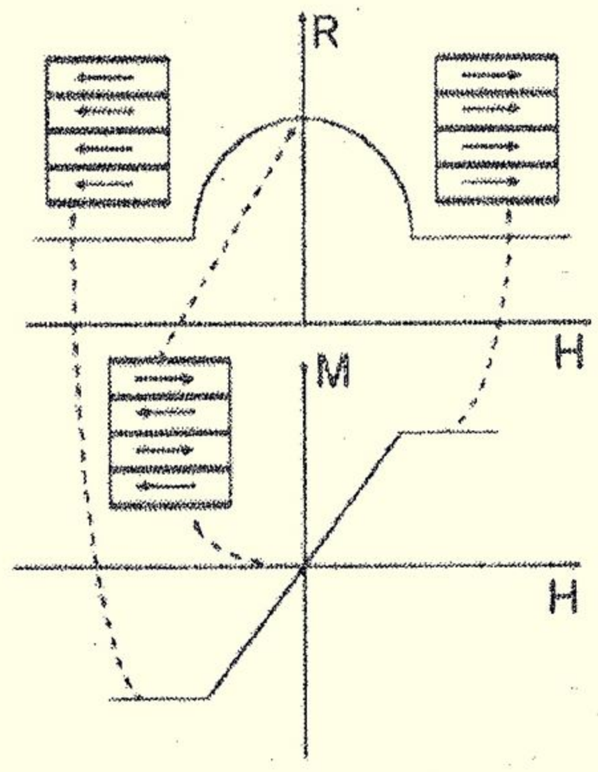


Figura 5.19: Descriere schematică a efectului de magnetorezistenţă gigant (GMR). Curba plină: dependenţa magnetizării multistratului de intensitatea câmpului H. Curba punctată: dependenţa rezistenţei electrice de H Figurile asociate dau configuraţia multistratului în câmp nul şi în câmpurile de saturaţie pozitive şi negative

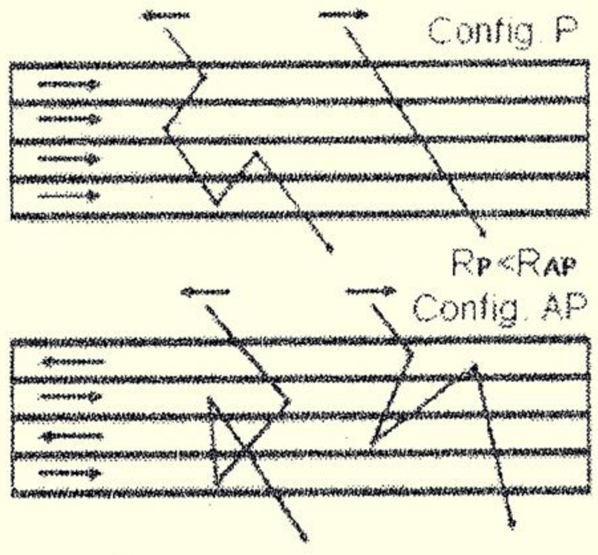


Figura 5.20: Descriere schematică a mecanismului de împrăştiere a spinilor electronici pentru interpretarea fenomenului de magnetorezistenţă gigant. Electronii sunt puternic împrăştiaţi îm straturile cu magnetizare antiparalelă (configuraţia antiparalelă AP) şi slab împrăştiaţi în straturile cu magnetizare paralelă (configuraţia P) Din aceasta rezultă un efect de "scurt-circuit" în care jumătate din numărul electronilor, fiind mai rar împrăştiaţi, condiţionează apariţia unei rezistenţe nete mai mici.

În 1994 S.Jin ş.a. descoperă un efect magnetorezistiv de cateva ori mai mare la materiale cu structura mixtă de perovskit de mangan. Variaţia rezistenţei magnetice atinge cateva ordine de mărime la această clasă de materiale astfel încât efectul a căpătat denumirea de "magnetorezistenţă colosală" (CMR). Accastă descoperire suscită un larg interes unei părţi însemnate a comunităţii ştiinţifice care se ocupă cu studiul fenomenului de supraconductibilitate cu temperatură critică ridicată.

Toate aceste descoperiri în domeniul magnetorezistenţei deschid calea catre un nou domeniu de cercetare, *electronica de spin*, care va antrena o topică majoră în fizica secolului 21 şi va avea un impact strâns asupra tehnologiei informaţiei.

5.4.3 Dependenţa rezistivităţii de intensitatea radiaţiei electromagnetice. Fotorezistenţă.

Acest fenomen, de variaţie a conductivităţii unui conductor în prezenţa radiaţiilor luminoase, nu este general pentru toţi conductorii. El a fost observat în special la o serie de semiconductori. În general conductivitatea creşte cu intensitatea radiaţiei luminoase, iar sensibilitatea depinde de lungimea de undă a radiaţiei. Din acest motiv aceşti semiconductori sunt folosiţi ca detectori de unde electromagnetice. Cu detectori realizaţi din diferite materiale semiconductoare se poate acoperi un domeniul larg din specrul de frecvenţă al radiaţiilor. Astfel, Compuşii plumbului, PbS, $PbSe$, $PbTe$, sunt sensibili în domeniul radiaţiilor infraroşii, în timp ce compuşii corespondenţi ai cadmiului, CdS, $CdSe$, $CdTe$ sunt sensibili în vizibil. În principiu se explică micşorarea rezistivităţii cu creşterea intensităţii luminoase, printr-o creştere a densităţii purtătorilor de sarcină din semiconductorul când acesta este supus radiaţiei electromagnetice. Mecanismul excitaţiei electronilor este de natură cuantică.

5.5 Metode de calcul al rezistenţelor

5.5.1 Metode în care se utilizează integrala finită a rezistenţei tuburilor de curent.

Formula (6.33) permite să se calculeze rezistenţa unui conductor, dacă se poate defini rezistenţa tubului de curent. Aceasta presupune cunoaşterea

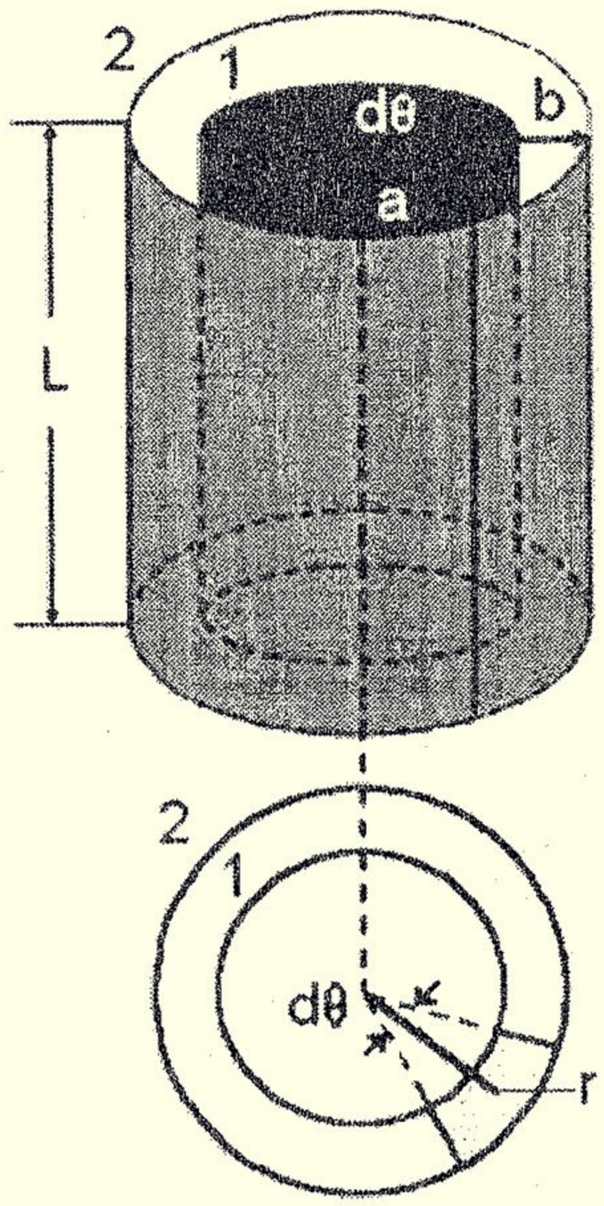


Figura 5.21: Tub de curent într-un cablu coaxial

în prealabil a repartiţiei liniilor de curent în conductor, iar rezistenţa totală se obţine integrând rezistenţele tuturor tuburilor de curent. În general acesta este posibil în cazul conductorilor sau al sistemelor de conductori omogeni cu simetrie geometrică simplă, cilindrică, sferică, elipsoidală, dar chiar şi în aceste cazuri calculul este uneori dificil. De exemplu calculul rezistenţei unui sistem de doi conductori cilindrici coaxiali, separaţi printr-un mediu omogen de conductivitate γ dată: Un astfel de sistem poate fi un cablu coaxial. Fie a şi b (cu $b > a$) razele celor doi cilindri. Având în vedere simetria cilindrică a acestui sistem, liniile de curent, respectiv liniile de câmp electric sunt radiale (Fig. 5.13). Considerând că L este lungimea cablului, rezistenţa unui tub elementar de curent limitat de unghiul diedru $d\theta$, se scrie, în acord cu relaţia de definiţie (6.33),

$$\int_1^2 \frac{dl}{\gamma dS} = \int_a^b \frac{dr}{\gamma L ds} = \frac{1}{\gamma L}\int_a^b \frac{dr}{r d\theta} = \frac{1}{\gamma L d\theta} Log\left(\frac{b}{a}\right) \qquad (5.46)$$

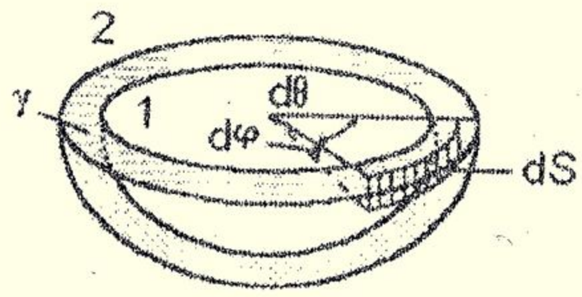


Figura 5.22: Schemă pentru calculul rezistenţei electrice a mediului cuprins între două emisfere

Toate aceste tuburi elementare fiind dispuse în paralel, rezistenţa totală între cei doi cilindri este

$$\frac{1}{R} = \sum \frac{1}{\int_1^2 \frac{dl}{\gamma . dS}} = \gamma L Ln\left(\frac{b}{a}\right) \int_0^{2\pi} d\theta \tag{5.47}$$

Rezistenţa cablului pe unitatea de lungime, $(L = 1)$, este

$$R = \frac{Ln\left(\frac{b}{a}\right)}{2\pi\gamma} \tag{5.48}$$

În mod asemănător se poate calcula rezistenţa mediului cuprins între două emisfere de raze a şi b (cu $b > a$) (Fig. 5.22. Rezistenţa unui tub de curent având secţiunea elementară $dS = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$, este dată de expresia

$$\int_1^2 \frac{dl}{\gamma dS} = \frac{1}{\gamma \sin\theta . d\theta . d\varphi} \int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{\gamma \sin\theta . d\theta . d\varphi} \frac{b-a}{ab}, \tag{5.49}$$

de unde se obţine rezistenţa totală cuprinsă între cele două emisfere

$$\frac{1}{R} = \sum \frac{1}{\int_1^2 \frac{dl}{\gamma dS}} = \frac{\gamma ab}{b-a} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta \tag{5.50}$$

sau,

$$R = \frac{1}{2\pi\gamma} \frac{b-a}{ab} \tag{5.51}$$

5.5.2 Metode bazate pe relaţia dintre rezistenţă capacitate conductivitate şi permitivitate (R,C, γ, ε).

Este de presupus existenţa unei relaţii între rezistenţă şi capacitate deoarece, în condiţiile influenţei totale care este ineluctabilă în cazul condensatorilor, vectorul câmp electric se supune teoremei lui Gauss şi totodată acesta

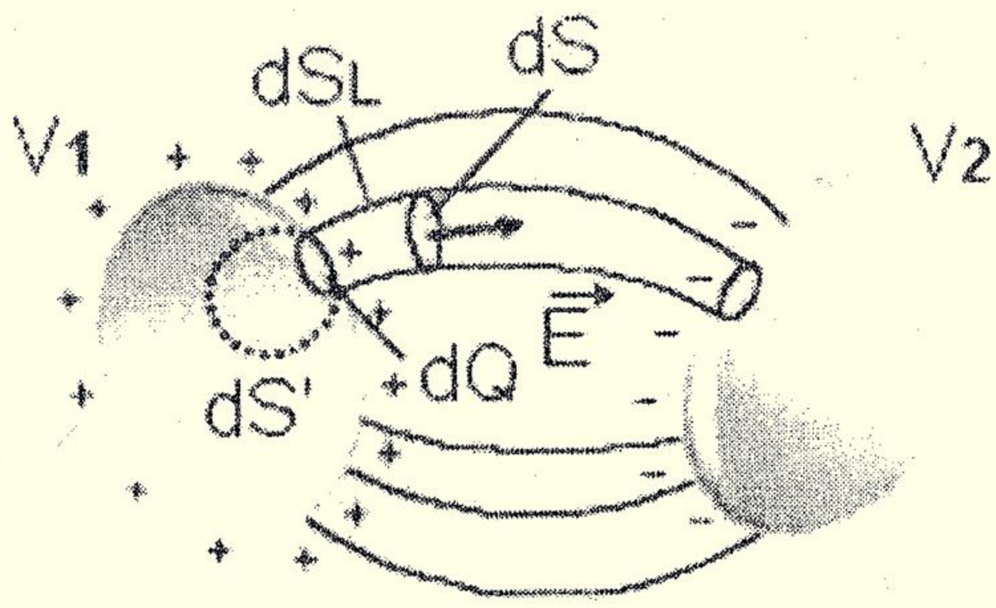


Figura 5.23: *Schemă pentru determinarea relaţiei dintre R, C, ε şi γ*

este legat de vectorul densitate de curent prin legea lui Ohm. Utilizarea acestor două relaţii fundamentale poate să conducă la stabilirea unei relaţii generale între rezistenţa R, conductivitatea γ, permitivitatea ε ale mediului cuprins între cele două suprafeţe echipotenţiale constituite de armăturile condensatorului şi capacitatea C a condensatorului. Într-o manieră generală, în locul armăturilor condensatorului considerăm doi conductori ideali (conductivitate infinită) separaţi printr-un mediu de conductivitate γ şi permitivitate ε. Dacă cei doi conductori sunt aduşi la potenţialele V_1 şi V_2, prin acest mediu va trece un curent electric. În acord cu legea locală a lui Ohm, în orice punct vectorul densitate de curent $\vec{J}$ este coliniar cu vectorul $\vec{E}$ tangent la linia de câmp electric. O secţiune dS a unui tub elementar de curent (Fig. 5.23 va fi străbătută de curentul

$$dI = \vec{J} \cdot \overrightarrow{dS} = \gamma \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \gamma d\Phi \tag{5.52}$$

Suprafeţele corespondente ale tubului de linii de câmp, având sarcinile $\pm dQ$, vor juca rolul armăturilor unui condensator elementar dC. Pe de altă parte, fluxul elementar $d\Phi$ al câmpului electric $\vec{E}$ prin aceeaşi secţiune dS poate fi evaluat apliând teorema lui Gauss. Se ştie că această teoremă se aplică la o suprafaţă închisă. Pentru aceasta vom considera că sarcina $+dQ$ se află în interiorul suprafeţei închise dS_T constituită din, suprafaţa dS, suprafaţa laterală a tubului dS_L şi o suprafaţă dS' situată în interiorul conductorului şi sprijinită pe conturul extremităţii tubului. În

acest caz

$$d\Phi = \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS}_T = \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} + \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS}_L + \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS'} = \frac{dQ}{\varepsilon} \tag{5.53}$$

Dar în aceste egalităţi avem $\vec{E} \cdot \overrightarrow{dS}_L = 0$, deoarece vectorul $\vec{E}$ este perpendicular pe $\overrightarrow{dS}_L$. În plus şi $\vec{E} \cdot \overrightarrow{dS'} = 0$, deoarece în interiorul conductorului câmpul electric este nul. În consecinţă, relatiile (5.53) şi (5.54) conduc la o egalitate, care poate să pară interesantă, între raportul curent/conductivitate şi raportul sarcină/permitivitate:

$$\frac{dI}{\gamma} = \frac{dQ}{\varepsilon} \tag{5.54}$$

Integrând această ecuaţie şi ţinând cont de faptul că $dQ = dC\,(V_1 - V_2)$, obţinem expresia

$$\int dI = \frac{\gamma}{\varepsilon_0}\,(V_1 - V_2) \int dC$$

în care $(V_1 - V_2)\,/I = R$ reprezintă rezistenţa mediului aflat în câmpul electric dintre echipotenţialele V_1 şi V_2. Această expresie constituie efectiv relaţia căutată,

$$RC\gamma = \varepsilon \tag{5.55}$$

şi ea oferă o posibilitate de a calcula rezistenţa electrică a oricărui mediu situat între doi conductori ideali aflaţi în condiţiile influenţei totale, (în particular, în cazul mediilor aflate între armăturile unui condensator). De exemplu, utilizarea relaţiei (5.56) pentru calculul rezistenţei unui cablu coaxial, sau al rezistenţei mediului dintre două emisfere concentrice, poate să conducă mai rapid şi mai simplu la rezultatele (5.49) şi (5.52) obţinute prin metoda descrisă în paragraful precedent, deoarece, pentru aceste sisteme, sunt cunoscute expresiile capacităţii. Astfel, cablul coaxial, poate să fie considerat ca un condensator cilindric, având lungimea L şi razele a şi b, pentru care se cunoaşte expresia capacităţii

$$C = \frac{2\pi\varepsilon L}{ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

După înlocuirea lui C în (6.56) obţinem imediat expresia rezistenţei

$$R = \frac{\varepsilon}{C\gamma} = \frac{1}{2\pi\lambda} ln\left(\frac{b}{a}\right),$$

Figura 5.24: Experiment pentru demonstrarea efectului termic al curentului electric într-un lanţ de conductori de natură diferită

care este efectiv expresia obţinută în (5.49). Pe de altă parte, capacitatea sistemului constituit din două emisfere concentrice de raze a şi b, aflate la potenţialele V_1 şi V_2 poate fi dedusă imediat, ea fiind jumătate din capacitatea condensatorului sferic, deoarece armăturile sferice ale acestui condensator pot fi considerate ca o conexiune în paralel a armăturilor a emisferelor de aceeaşi rază. Astfel cu

$$C = 2\pi\varepsilon\frac{ab}{b-a}$$

relaţia (6.56) duce imediat la formula (6.52) care a fost dedusă în paragraful precedent pentru acest sistem:

$$R = \frac{\varepsilon}{C\gamma} = \frac{1}{2\pi\gamma}\frac{b-a}{ab}$$

5.6 Energia electrocinetică. Legea lui Joule

5.6.1 Fapte experimentale fundamentale

Un experiment simplu poate să suscite direct problema transformărilor de energie care pot avea loc pe durata trecerii curentului electric prin conductori: Facem să treacă un curent de intensitate progresiv crescătoare printr-o grupare de conductori de natură diferită dar de aceeaşi lungime şi de aceeaşi secţiune transversală, conectaţi în serie, (Fig. 5.24. Se constată mai întâi că toţi aceşti conductori se încălzesc, însă efectul termic este diferit de la un conductor la altul. Peste o anumită valoare a curentului, anumiţi conductori ajung la incandescenţă, în timp ce ceilalţi încă nu ating această stare. Această degajare de căldură din conductorul parcurs de curentul electric este numită efect Joule. Se constată astfel ca, energia transformată în căldură prin efect Joule depinde nu numai de intensitatea curentului ci şi de proprietăţile electrice le conductorului. Lungimea şi secţiunea conductorilor consideraţi în experimentul descris fiind aceeaşi pentru toţi conductorii, se

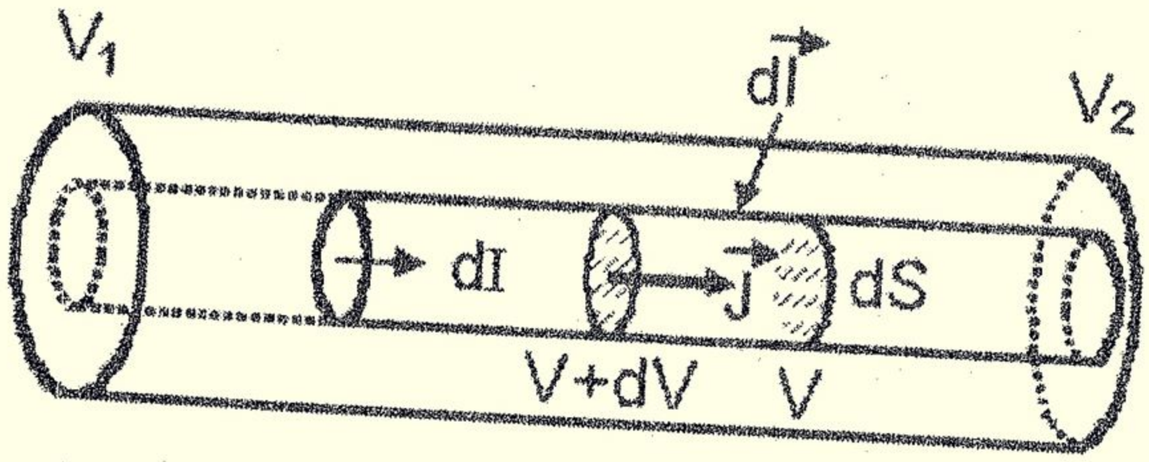


Figura 5.25: Schemă pentru relevarea legii lui Joule locală

poate deduce imediat că nu rezistenţa electrică este atât de importantă în acest fenomen, pe ât de importantă este conductivitatea sau rezistivitatea materialului. S-a văzut deja că, în cazul conducţici electronice a metalelor, conductivitatea electrică γ, (formula (5.28)), depinde, nu numai de masa m, sarcina e a purtătorilor, densitatea volumică a acestora ne, ci şi de durata τ de parcurgere a drumului liber mijlociu. În condiţiile creşterii curentului, această durată se micşorează datorită accelerării sarcinilor în câmpul electric şi astfel, conductivitatea se micşorează, respectiv rezistivitatea creşte, Efectul asupra rezistivităţii este similar cu cel produs de creşterea temperaturii conductorului, dar de data aceasta conductorul nu este încălzit din exterior ci încălzirea lui este datorată agitaţiei termice a purtătorilor de sarcină provocată de curentului electric. Să formulăm cantitativ expresia acestei energii termice disipate prin efect Joule.

5.6.2 Legea lui Joule sub formă locală sau diferenţială

Fie unul dintre conductorii consideraţi în experimentul descris mai înainte, care, aflat la potenţialele V_1 şi V_2, (cu $V_1 > V_2$), este parcurs de un curent definit în orice punct prin vectorul densitate de curent $\vec{J}$. Un element de volum dv dintr-un tub de curent, de lungime dl şi de secţiune dS (Fig. 5.25), aflat între două echipotenţiale foarte apropiate, $V + dV$ şi V, este parcurs de curentul $dI = \widehat{J} \cdot \overrightarrow{dS} = \gamma \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS}$. Sub acţiunea câmpului electric $\vec{E}$, dirijat, în general în sensul echipotenţialelor descrescătoare, o sarcină dQ va traversa volumul elementar dv într-un timp elementar dt, treând de la potenţialul $V + dV$ la V. Prin aceasta energia electrostatică a sarcinii dQ s-a micşorat, de la $(V + dV)\, dQ$ la $V dQ$, cu cantitatea

$$dW' = dQdV = dIdtdV = \left(\vec{J} \cdot \overrightarrow{dS}\right) dt \left(-\vec{E} \cdot \overrightarrow{dl}\right) = -\left(\vec{J} \cdot \vec{E}\right) dvdt \quad (5.56)$$

Dar, în virtutea principiului conservării energiei, această energie electrostatică dW' nu se pierde ci se conservă, ea regăsindu-se în sistem sub formă de energie termică dW. Astfel, $dW' + dW = 0$ şi

$$dW = \vec{J} \cdot \vec{E} dv dt \tag{5.57}$$

ţinând cont de legea lui Ohm locală, $\vec{J} = \gamma \vec{E}$, această expresie mai poate fi scrisă sub forma următoare

$$dW = \frac{J^2}{\gamma} dv dt = \gamma E^2 dv dt, \tag{5.58}$$

care exprimă faptul că energia dW este totdeauna pozitivă şi, deci ea corespunde totdeauna unei disipaţii de căldură şi niciodată unei absorbţii. În plus relaţia (5.59) mai exprimă faptul că această energie este datorată exclusiv curentului electric, respectiv surselor care crecază câmpul electric. Dacă în relaţia (5.59) exprimăm pe $\vec{J}$ în *amper/metru* şi pe $\vec{E}$ în *volt/metru*, energia dW disipată prin efect Joule se exprimă în jouli: $1 joule = 1 voltamper$ sec *undă*. Energia disipată în unitatea de timp în volumul elementar dv reprezintă *puterea*

$$dP = \frac{dW}{dt} \tag{5.59}$$

şi se măsoară în *watt*: $1 watt = 1 joule/$ sec *undă*.

Treând la limită, ând volumul elementar Δv, centrat în jurul unui punct oarecare din volumul v, tinde către zero, raportul

$$\frac{dP}{dv} = \frac{J^2}{\gamma} = \gamma E^2 = \vec{J} \cdot \vec{E} \tag{5.60}$$

exprimă o lege valabilă în orice punct din conductorul parcurs de curent. Această expresie este numită *legea lui Joule sub formă locală*.

5.6.3 Relevanţa legii lui Joule locale în contextul teoriei clasice a conducţiei electronice prin metale

S-a văzut în (5.25) că, în condiţiile conducţiei electronice în metale, în prezenţa unui câmp electric exterior $\vec{E}$, electronii capătă, după fiecare şoc cu un ion din reţeaua cristalină, o viteză suplimentară, $\Delta \underline{v} = \vec{v}(t) - v_0 = -\frac{e\vec{E}}{m} t$.

Considerând că 2τ este durata medie dintre două şocuri consecutive, energia cinetică E_c pe care o capătă electronul în câmpul $\vec{E}$ este

$$E_c = \frac{1}{2} m (\Delta v)^2 = \frac{2\tau e^2}{m} E^2 \tag{5.61}$$

Această energie cinetică este cedată reţelei sub formă de căldură, rezultând astfel o creştere a temperaturii conductorului prin efect Joule. Admiţând că în unitatea de volum există n electroni liberi, şi că fiecare electron transferă reţelei în medie energia (5.62) în intervalul de timp 2τ, puterea medie disipată în unitatea de volum prin efect Joule este dată de

$$\frac{dP}{dv} = \frac{1}{2\tau} n E_c = \frac{ne^2\tau}{m} E^2 \tag{5.62}$$

Dar, conform notaţiei stabilite în legea lui Ohm locală (formula (5.28)), factorul lui E^2 reprezintă conductivitatea, $\frac{ne^2\tau}{m} = \gamma$. Regăsim în (5.63) expresia legii lui Joule sub forma locală (formula (5.61)).

5.6.4 Legea lui Joule sub formă integrală pentru o porţine de conductor

Utilitatea legii lui Joule sub forma diferenţială constă în faptul că, prin integrare, pentru o porţiune de conductor (Fig. 5.25) situată între două suprafeţe echipotenţiale V_1 şi V_2, se poate obţine puterea totală disipată prin efect Joule. Astfel, considerând în această porţiune de conductor un tub elementar de curent, de volum $dv = dS.dl$ străbătut de curentul dI, puterea disipată în acest volum este $dP = \vec{J} \cdot \vec{E} dv = (\vec{J} \cdot \vec{dS})(\vec{E} \cdot \vec{dl}) = (\vec{J} \cdot \vec{dS})(-dV)$. Integrând această putere pentru întreaga porţiune de conductor de secţiune S şi lungime l, aflată între cele două suprafeţe echipotenţiale obţinem puterea totală

$$P = \int_S \vec{J} \cdot dS \int_{V_1}^{V_2} (-dV) = I (V_1 - V_2) \tag{5.63}$$

Dacă se notează diferenţa de potenţial cu $U = V_1 - V_2$ şi, ţinem cont de legea lui Ohm sub forma integrală (5.34)) pentru această porţiune de circuit, expresia puterii (5.64) poate fi scrisă sub una din următoarele trei forme echivalente:

$$P = UI = RI^2 = \frac{U^2}{R} \tag{5.64}$$

Expresia energiei disipate prin efect Joule, într-un interval de timp t este

$$W = (V_1 - V2)\, It = RI^2 t = \frac{U^2}{R} t \tag{5.65}$$

Aceleaşi expresii ale energiei pot fi obţinute multiplicând cu It legea lui Ohm sub forma integrală, $V_1 - V_2 = RI$. Se obţine astfel,

$$(V_1 - V_2) It = RI^2 t = (V_1 - V_2) Q \tag{5.66}$$

Q fiind sarcina electrică ce străbate secţiunea S a conductorului. Sub această formă (5.63), care constituie efectiv o *interpretare energetică a legii lui Ohm*, se poate înţelege imediat că energia disipată prin efect Joule într-o porţiune de circuit, de rezistenţă R, corespunde diminuării energiei potenţiale a sarcinii Q, această energie fiind transformată în întregime în căldură în porţiunea de circuit considerată.

5.6.5 Aplicaţii ale efectului Joule

5.7 Generalizarea legii lui Ohm

5.7.1 Câmp electromotor. Generator electric

Legea lui Ohm stabilită pentru o porţiune de circuit (5.34), aplicată unui un circuit constituit dintr-un simplu conductor închis, duce la concluzia inexistenţei curentului elctric pe circuit. Într-adevăr, fie circuitul închis din (Fig. 5.26, în care presupunem că există un curent electric definit în fiecare punct prin vectorul densitate de curent $\vec{J} = \gamma \vec{E}$. Circulaţia vectorului $\vec{J}$ pe o linie de curent Γ închisă în acest circuit este dată de integrala circulaţiei elementare $\vec{J} \cdot \overrightarrow{dl}$ pe întregul contur Γ în care vectorul $\overrightarrow{dl}$ este un element de drum colinear cu $\vec{J}$):

$$\int_\Gamma \vec{J} \cdot \overrightarrow{dl} = \gamma \int_\Gamma \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} = 0 \tag{5.67}$$

Se constată imediat că această circulaţie este nulă, deoarece $\int_\Gamma \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} = 0$, fapt care sugerează inexistenţa unei diferenţe de potenţial pe acest circuit şi implicit absenţa unui curent electric. Rezultă că un circuit parcurs de curent nu poate fi realizat aşa cum indică schema din (Fig. 5.26). Pentru a face să

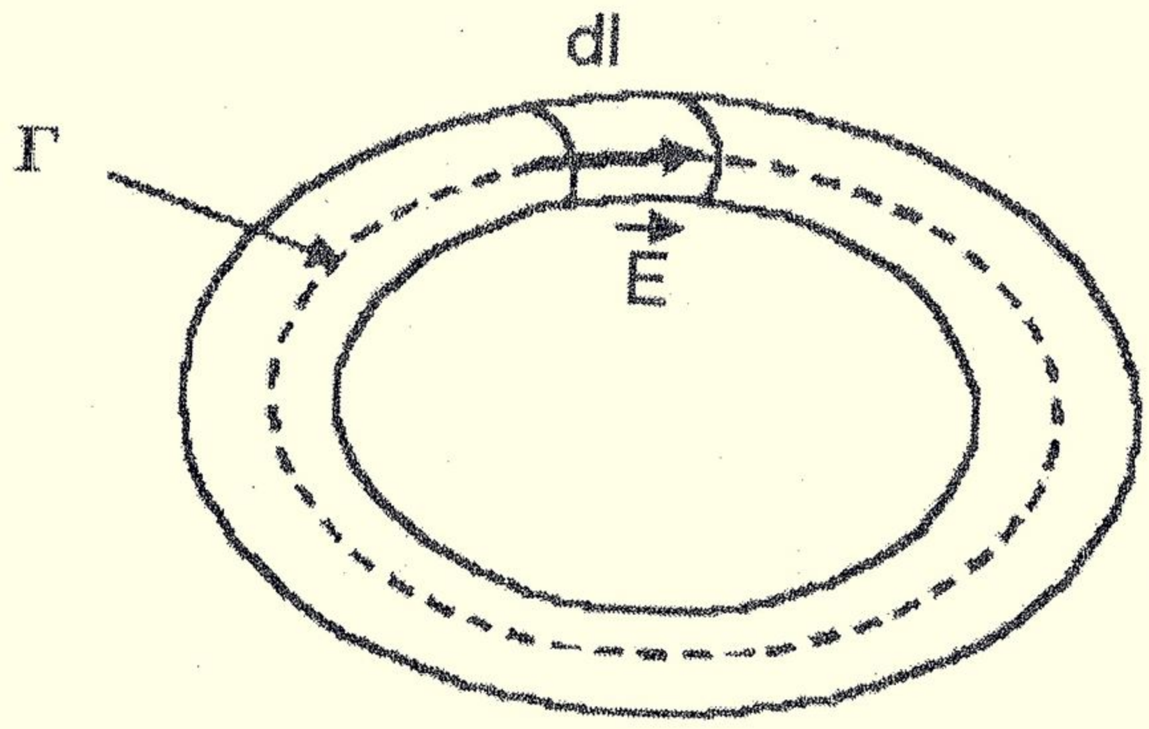


Figura 5.26: Circulaţia vectorului $\vec{E}$ în circuitul închis, fără sursă de curent, este nulă

circule sarcinile electrice în circuitul închis este necesar să existe în circuit un dispozitiv care să menţină, în permanenţă, o dife- renţă de potenţial constantă pe o porţiune de circuit cuprinsă între două suprafeţe echipotenţiale V_a şi V_b. Această diferenţă de potenţial este sursa unui *câmp electromotor* $\vec{E}_m$ constant, căruia i se datorează *forţa electromotoare* $\vec{F}_m = q\vec{E}_m$. Această forţă pune în mişcare sarcinile electrice în întregul circuit. Câmpul electromotor $\vec{E}_m$ este constant în orice punct din porţiunea de circuit aflată între echipotenţialele V_a şi V_b. Numim *generator electric* dispozitivul care generează un câmp electromotor $\vec{E}_m$ constant între două puncte (a), şi (b) ale circuitului. Totalitatea punctelor (a), şi (b) situate pe suprafeţele echipotenţiale V_a şi V_b constituie bornele generatorului. Diferenţa de potenţial dintre bornele generatorului este efectiv egală cu circulaţia vectorului $\vec{E}_m$ pe distanţa dintre borne,

$$E = \int_a^b \vec{E}_m \cdot \overrightarrow{dl}, \tag{5.68}$$

şi se numeşte *tensiune electromotoare* a generatorului, (prescurtat t.e.m.).

5.7.2 Legea lui Ohm pentru o porţiune de circuit care conţine un generator electric.

a) Forma locală a legii lui Ohm

Considerăm o porţiune de circuit, aflată între suprafeţele echipotenţiale

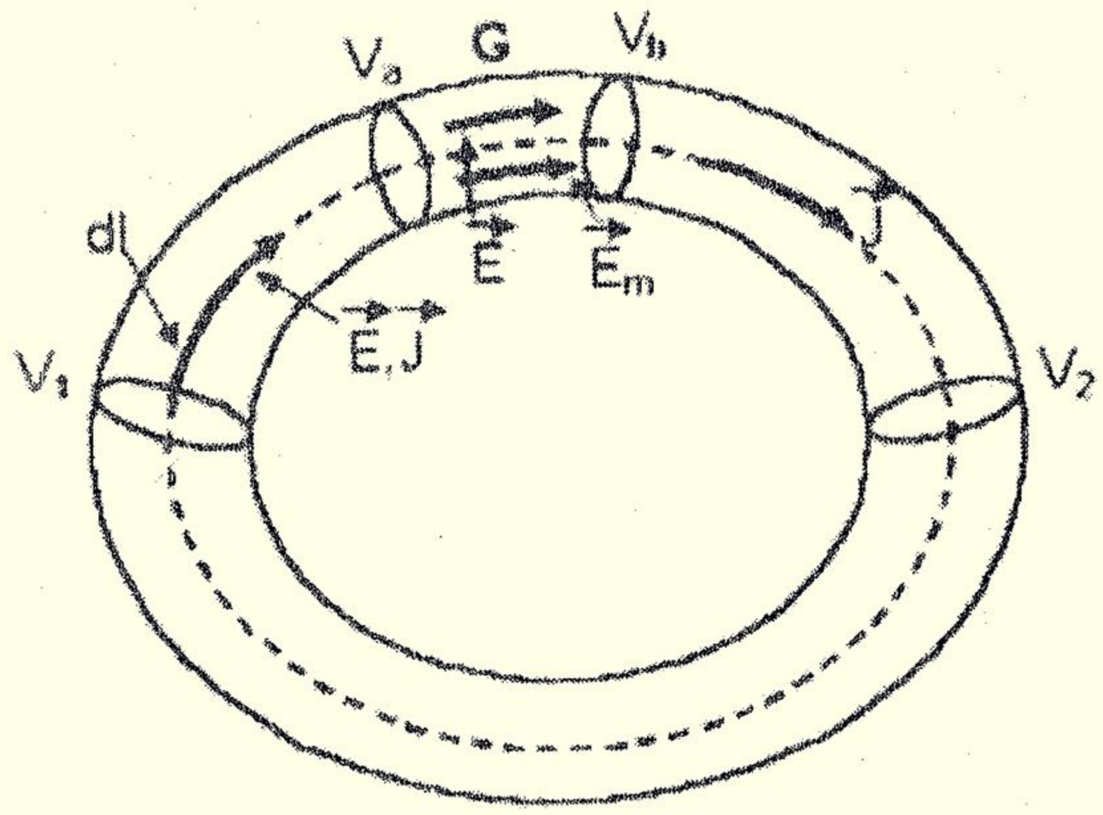


Figura 5.27: Circulaţia vectorului $\vec{E}$ pe o porţiune de circuit ce conţine un generator G de curent electric

V_1 şi V_2 (Fig. 5.27), pe care se află un generator localizat între echipotenţialele V_a şi V_b. Forţele care acţionează asupra unei particule încărcate cu sarcina q, aflate în interiorul generatorului sunt: *Forţa electrică*, $\vec{F} = q\vec{E}$, *forţa de frecare* $\vec{F}_{fr} = -a\vec{v}$ şi *forţa electromotoare* $\vec{F}_m = q\vec{E}_m$. Curentul electric este constant pe întreaga porţiune de circuit şi pentru aceasta forţele în chestiune nu trebuie să imprime nici o acceleraţie purtătorilor de sarcină. Aceasta înseamnă că rezultanta celor trei forţe trebuie să fie nulă:

$$\overrightarrow{F} + \overrightarrow{F}_{fr} + \overrightarrow{F}_m = 0 \tag{5.69}$$

sau,

$$q\left(\vec{E} + \vec{E}_m\right) = a\vec{v} = \frac{a}{\rho}\vec{J} \tag{5.70}$$

De aici se obţine *forma locală a legii lui Ohm pentru porţiunea de circuit care conţine un generator*,

$$\vec{J} = \gamma\left(\vec{E} + \vec{E}_m\right), \tag{5.71}$$

în care $\gamma = \frac{\rho q}{a}$. În exteriorul generatorului, unde $\vec{E}_m = 0$, regăsim legea lui Ohm locală aşa cum a fost definită în (6.21).

b) Forma integrală a legii lui Ohm

Integrala ecuaţiei (5.73) pentru o porţiune de circuit care conţine un generator, se efectuează mai întâi pentru un tub de curent de lungime l şi

secţiune dS, parcurs de curentul dI, aflat între echipotenţialele V_1 şi V_2, (Fig. 5.27), urmând ca apoi să se sumeze pentru toate tuburile de curent care se sprijină pe secţiunea S a conductorului: Calculul este asemănător celui făcut pentru determinarea rezistenţei unei porţiuni de circuit. Astfel, pentru tubul de curent avem,

$$\int_1^2 \left(\vec{E}+\vec{E}_m\right)\cdot\vec{dl}=\int_1^2\frac{\vec{J}\cdot\vec{dl}}{\gamma}=dI\int_1^2\frac{dl}{\gamma dS}=rdI, \tag{5.72}$$

în care r este rezistenţa tubului. Cu $\int_1^2\vec{E}\cdot\vec{dl}=V_1-V_2$ şi cu

$$\int_1^2\vec{E}_m\cdot\vec{dl}=\int_a^b\vec{E}_m\cdot\vec{dl}=\mathbf{E} \tag{5.73}$$

în care $\mathbf{E}$ *este tensiunea electromotoare a generatorului*, prescurtat (t.e.m.), ecuaţia (6.69) dă

$$V_1-V_2+\mathbf{E}=rdI \tag{5.74}$$

Sumând pentru toate tuburile de curent, cu $I=\sum dI=(V_1-V_2+\mathbf{E})\sum\frac{1}{r}$ şi cu $\sum\frac{1}{r}=\frac{1}{R}$, în care R este rezistenţa totală a porţiunii de circuit cuprinse între echipotenţialele V_1 şi V_2, obţinem *legea lui Ohm sub formă integrală pentru porţiunea de circuit pe care se află un generator*:

$$V_1-V_2=RI-\mathbf{E}. \tag{5.75}$$

5.7.3 Receptor electric. Câmp contra-electromotor

Există dispozitive care, conectate într-un circuit, absorb energie de la sarcinile puse în mişcare de generator, într-o manieră diferită de cea în care frecarea sarcinilor prin efect Joule absoarbe energia electrică transformînd-o în energie termică. În aceste dispozitive energia electrică absorbită este transformată, în diverse alte forme de energie, mecanică, chimică etc. În porţiunea de circuit în care se află receptorul, energia electrică W este absorbită şi $W<0$, spre deosebire de regiunea în care se află generatorul, unde energia este debitată în circuit şi $W>0$.

În aceste condiţii, conform legii lui Joule sub forma locală (5.57), energia dW trimisă de generator în circuit pe o durată dt este egală cu

$$dW=Pdt=\left(\vec{J}\cdot\vec{E}_m\right)dvdt \tag{5.76}$$

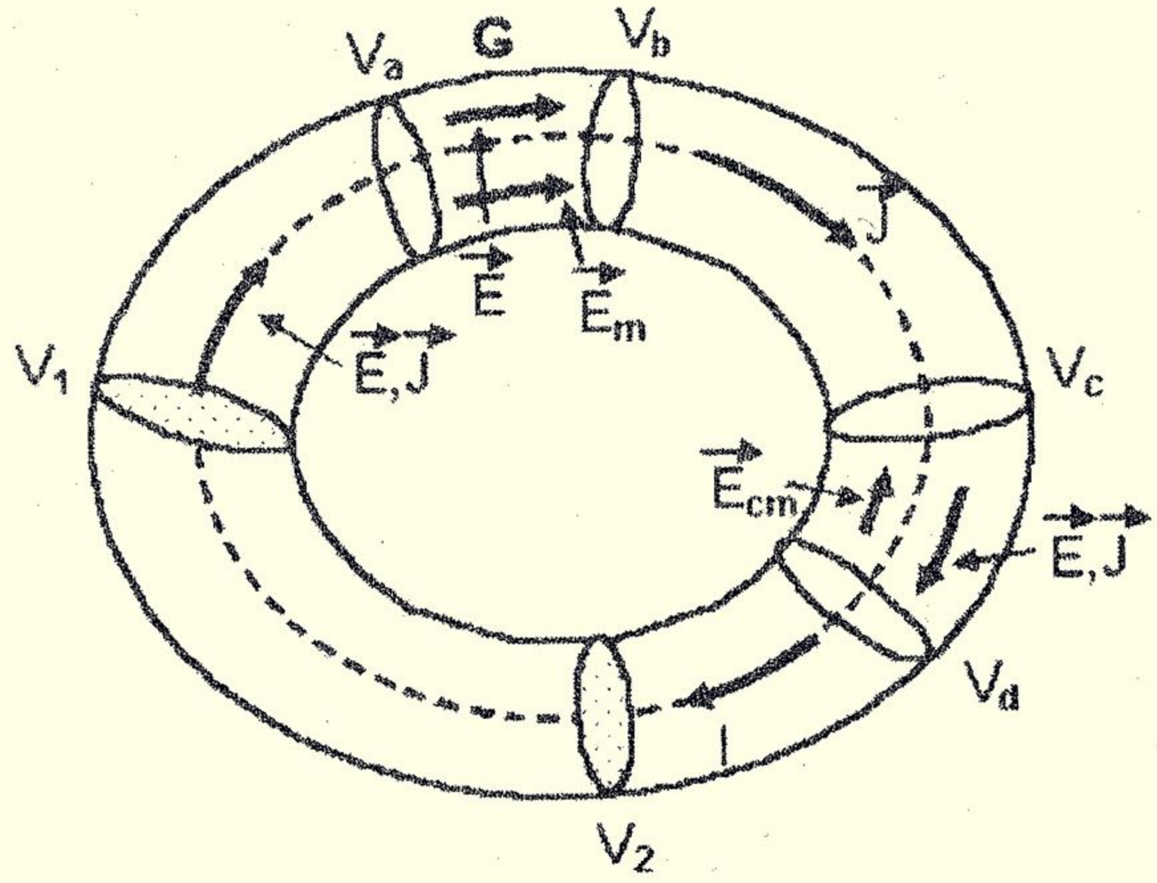


Figura 5.28: Porţiune de circuit ce conţine generator şi receptor

şi, deoarece $dW > 0$, produsul scalar al vectorilor densitate de curent $\vec{J}$ şi câmp electromotor $\vec{E}_m$ este pozitiv, $(\vec{J} \cdot \vec{E}_m) > 0$. Aceasta înseamnă că, *în porţiunea de circuit în care se află generatorul, vectorii* $\vec{J}$ *şi* $\vec{E}_m$ *trebuie să aibă acelaşi sens.*

În porţiunea de circuit în care se află receptorul, energia dW' pe aceeaşi durată dt este

$$dW' = P'dt = \left(\vec{J} \cdot \vec{E}_{cm}\right) dvdt, \tag{5.77}$$

dar aceasta energie este absorbită, $dW' < 0$, şi în acest caz produsul scalar al vectorilor $\vec{J}$ şi $\vec{E}_{cm}$ este negativ, $(\vec{J} \cdot \vec{E}_{cm}) < 0$. Rezultă că, în *porţiunea în care se află receptorul, vectorii* $\vec{J}$ *şi* $\vec{E}_{cm}$ *sunt dirijaţi în sens opus*, ca şi cum *câmpul electric* $\vec{E}_{cm}$ *se opune curentului de densitate* $\vec{J}$ datorat câmpului electromotor exterior $\vec{E}_m$. Din acest motiv vom numi acest câmp $\vec{E}_{cm}$ *câmp contraelectromotor*.

5.7.4 Forma locală a legii lui Ohm pentru o porţiune de circuit în care se află un generator şi un receptor

Porţiunea de circuit aflată între suprafeţele echipotenţiale V_1 şi V_2 (Fig. 5.28), conţine un generator localizat între echipotenţialele V_a şi V_b şi un receptor localizat între echipotenţialele V_c şi V_d. Forţele care acţionează asupra

unei particule încărcate cu sarcina q, sunt: *forţa electrică*, $\vec{F} = q\vec{E}$, *forţa de frecare* $\vec{F}_{fr} = -a\vec{v}$, *forţa electromotoare* $\vec{F}_m = q\vec{E}_m$ care acţionează numai în interiorul generatorului şi *forţa contraelectromotoare* $\vec{F}_{cm} = q\vec{E}_{cm}$ localizată în receptor. Pentru ca intensitatea curentului electric să fie constantă este necesar ca rezultanta acestor forţe să fie nulă:

$$\vec{F} + \vec{F}_{fr} + \vec{F}_m + \vec{F}_{cm} = 0, \tag{5.78}$$

ţinând cont de expresiile acestor forţe şi de semnele vectorilor $\vec{E}$, $\vec{E}_m$ şi $\vec{E}_{cm}$ în raport cu semnul vectorului $\vec{J}$, această ecuaţie se scrie:

$$q\left(\vec{E} + \vec{E}_m - \vec{E}_{cm}\right) = a\vec{v} = \frac{a}{\rho}\vec{J} \tag{5.79}$$

Se obţine astfel *forma locală a legii lui Ohm pentru porţiunea de circuit care conţine un generator şi un receptor*:

$$\vec{J} = \gamma\left(\vec{E} + \vec{E}_m - \widehat{E}_{cm}\right) \tag{5.80}$$

5.7.5 Forma integrală a legii lui Ohm generale pentru o porţiune de circuit conţinând generator şi receptor.

Integrăm ecuaţia (5.82) pentru porţiunea de circuit din Fig.5.28 care conţine un generator şi un receptor între echipotenţialele V_1 şi V_2. Pentru un tub de curent de lungime l şi de secţiune dS, parcurs de curentul dI, aflat între aceste echipotenţiale, avem:

$$\int_1^2 \left(\vec{E} + E_m - \vec{E}_{cm}\right)\cdot\overrightarrow{dl} = \int_1^2 \frac{\vec{J}\cdot\overrightarrow{dl}}{\gamma} = dI\int_1^2 \frac{dl}{\gamma dS} = rdI \tag{5.81}$$

Cu $\int_1^2 \vec{E}\cdot\overrightarrow{dl} = V_1 - V_2$ şi $\int_1^2 \vec{E}_m\cdot\overrightarrow{dl} = \int_a^b \vec{E}_{m,}\cdot\overrightarrow{dl} = \mathbf{E}$, şi cu $\int_1^2 \widehat{E}_{cm}\cdot\overrightarrow{dl} = \int_c^d \vec{E}_{cm}\cdot\overrightarrow{dl} = \mathbf{E}'$, în care integrala circulaţiei câmpului contraelctromotor $\vec{E}_{cm}$ între bornele c şi d ale receptorului reprezintă *tensiunea contraelectromotoare* $\mathbf{E}\prime$, (prescurtat t.c.e.m.), ecuaţia (5.78) dă

$$V_1 - V_2 + \mathbf{E} - \mathbf{E}\prime = rdI \tag{5.82}$$

Sumând pentru totalitatea tuburilor de curent care se sprijină pe secţiunea transversală S a conductorului, rezultă curentul total, $I = \sum dI = (V_1 -$

$V_2 + E - E\prime) \sum \frac{1}{r}$, şi cu $\sum \frac{1}{r} = \frac{1}{R}$, obţinem *expresia legii lui Ohm sub formă integrală, generalizată pentru o porţiune de circuit care conţine generator si receptor*:

$$V_1 - V_2 = RI - \mathbf{E} + \mathbf{E}\prime \tag{5.83}$$

Intr-o formulare mai completă a acestei relaţii, va trebui să ţinem seama de faptul între echipotenţialele V_a şi V_b, în care acţionează câmpul electromotor E_m al generatorului, proprietăţile mediului conductor, definite prin valorile conductivităţii γ_i, lungimii l_i şi secţiunii S_i, sunt diferite de cele ale conductorului exterior generatorului, considerate până acum ca fiind definite prin γ, l şi S. Vectorul densitate de curent $\vec{J}$ fiind constant în întreaga porţiune de circuit cuprinsă între echipotenţialele V_1 şi V_2, şi de acelaşi sens cu vectorul $\vec{E}_m$, integrarea legii lui Ohm locale, $\vec{J} = \gamma_i \left(\vec{E} + \vec{E}_m\right)$, pentru porţiunea de circuit cuprinsă între echipotenţialele V_a şi V_b (reprezentând bornele generatorului), dă următorul rezultat,

$$V_a - V_b = R_i I - E, \tag{5.84}$$

în care $R_i = \frac{l_i}{\gamma_i S_i}$ este rezistenţa elcctrică a generatorului.
Va trebui să ţinem seama deasemenea de faptul că în porţiunea de circuit, de conductivitate γ_i', lungime l_i' şi secţiune S_i', cuprinsă între echipotenţialele V_c şi V_d în care se află receptorul, al cărui câmp contraelectromotor este $\vec{E}_{cm}$, acţionează legea lui Ohm locală $\vec{J} = \gamma_i' \left(\vec{E} - \vec{E}_{cm}\right)$. Sub forma integrală aceasta lege este

$$V_c - V_d = R_i' I + \mathbf{E}\prime \tag{5.85}$$

în care $R_i' = \frac{l_i'}{\gamma_i' S_i'}$ reprezintă rezistenţa electrică a receptorului.

În mod corespunzător, formula (5.78), după integrare pentru întreaga porţiune de circuit cuprinsă între echipotenţialele V_1 şi V_2, capătă următoarea formă generală:

$$V_1 - V_2 = I\left(R + R_i + R_i'\right) - \mathbf{E} + \mathbf{E}\prime \tag{5.86}$$

sau,

$$V_1 - V_2 = IR_T - \mathbf{E} + \mathbf{E}\prime, \tag{5.87}$$

în care R_T reprezintă rezistenţa totală a porţiunii de circuit cuprinsă între echipotenţialele V_1 şi V_2

$$R_T = R + R_i + R_i' \tag{5.88}$$

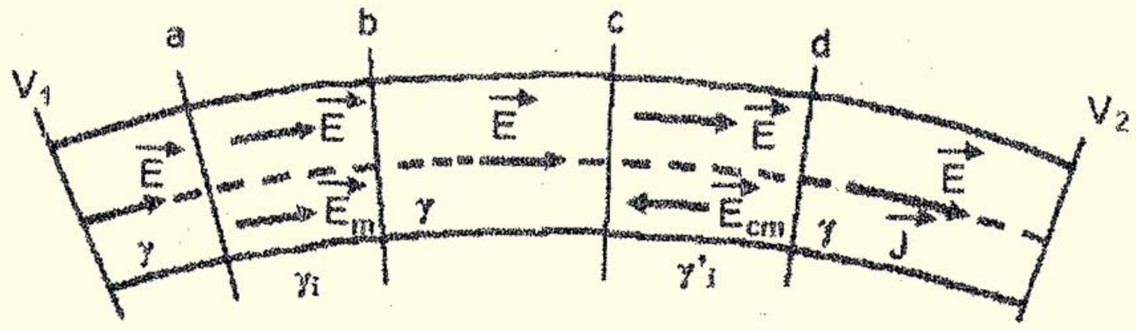


Figura 5.29: Schema detaliată a porţiunii de circuit cu generator şi receptor

Într-adevăr, ţinând seama de schema detaliată a porţiunii de circuit ce conţine generatorul şi receptorul, dată în (Fig. 5.29, şi evaluând circulaţia vectorului $\vec{J}$ între echipotenţialele extreme, V_1 şi V_2, obţinem:

$$\int_1^a \vec{E}\cdot\overrightarrow{dl}+\int_a^b\left(\vec{E}+\vec{E}_m\right)\cdot\overrightarrow{dl}+\int_b^c\vec{E}\cdot\overrightarrow{dl}+\int_c^d\left(\vec{E}-\vec{E}_{cm}\right)\cdot\overrightarrow{dl}+$$

$$+\int_d^2\vec{E}\cdot\overrightarrow{dl}=I\left[\int_1^a\frac{dl}{\gamma dS}+\int_a^b\frac{dl}{\gamma_i dS_i}+\int_b^c\frac{dl}{\gamma dS}+\int_c^d\frac{dl}{\gamma_i' dS_i'}+\int_d^2\frac{dl}{\gamma dS}\right] \tag{5.89}$$

După integrare se obţineurmătorul rezultat,

$$(V_1-V_a)+V_a-V_b+\mathbf{E})+(V_b-V_c)+V_c-V_d-\mathbf{E}')+(V_d-V_2)=$$

$$=I\left[\frac{l_{1a}}{\gamma S}+\frac{l_{ab}}{\gamma_i S_i}+\frac{l_{bc}}{\gamma S}+\frac{l_{cd}}{\gamma_i' S_i'}+\frac{l_{d2}}{\gamma S}\right]$$

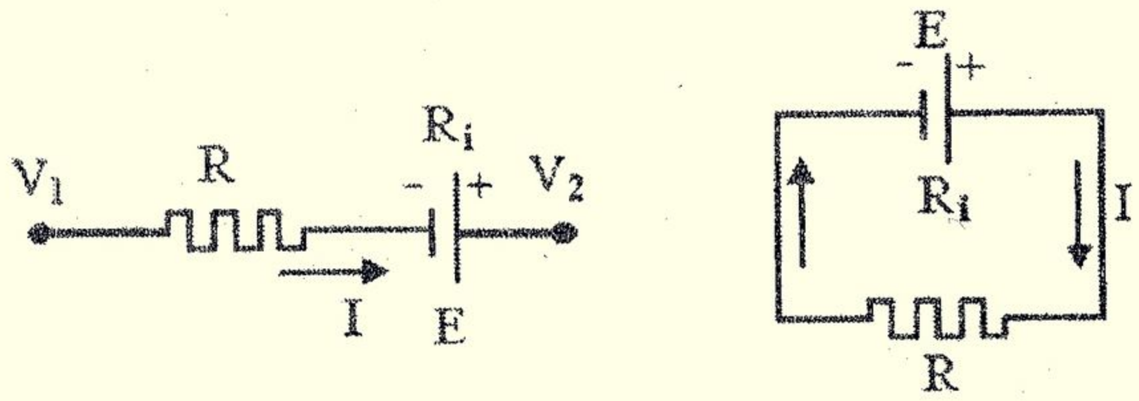
în care, după ce s-a notat cu $R=\frac{l_{1a}}{\gamma S}+\frac{l_{bc}}{\gamma S}+\frac{l_{d2}}{\gamma S}$ rezistenţa exterioară generatorului, cu $R_i=\frac{l_{ab}}{\gamma_i S_i}$ rezistenţa interioară a generatorului şi cu $R_i'=\frac{l_{cd}}{\gamma_i' S_i'}$ rezistenţa interioară a receptorului, identificăm cu uşurinţă formula generală (5.89).

5.7.6 Legea lui Ohm pentru circuite închise.

a. Circuit cu generator şi rezistor.

Pentru o porţiune de circuit cu generator şi rezistor, reprezentată schematic în (Fig. ??), legea lui Ohm generalizată (5.89) se scrie:

$$V_1-V_2=I\left(R+R_i\right)-E \tag{5.90}$$



(a) (b)

Figura 5.30: Reprezentare schematică a unui circuit cu generator.şi rezistor : a) deschis, b) închis

Dacă unim extremităţile acestei porţiuni de circuit, obţinem un circuit închis, (Fig. ??). În acest caz $V_1 = V_2$ şi obţinem legea lui Ohm pentru *circuitul închis constituit dintr-un generator, a cărui rezistenţă internă este* R_i, *şi un rezistor de rezistenţă* R:

$$\mathbf{E} = I\,(R + R_i) \tag{5.91}$$

Când $R >> R_i$ tensiunea la bornele generatorului este sensibil independentă de R. În cazul limită, $R = \infty$, circuitul este deschis şi tensiunea de la bornele generatorului se exprimă prin relaţia (5.81) şi este efectiv independentă de R. În aceste condiţii avem *un generator de tensiune constantă.* În cazul în care rezistenţa R este nulă, generatorul este în scurt-circuit şi debitează curentul $I_{sc} = \mathbf{E}/R_i$. Aceste două regimuri particulare, "în gol" şi "în scurt-circuit" cracterizează complet o sursă de tensiune electromotoare constantă.

Când $R_i << R$, curentul este egal cu $I = E/R_i$, deci sensibil independent de rezistenţa R exterioară generatorului. În acest caz avem un *generator de curent constant.*

Se poate da o interpretare energetică a legii lui Ohm pentru circuitul în chestiune, multiplicînd ambii membri ai ecuaţiei (5.92) cu Idt:

$$\mathbf{E}Idt = (R + R_i)\,I^2dt \tag{5.92}$$

Acest bilanţ energetic arată că, energia furnizată de generator, $EIdt$, este disipată sub formă de căldură prin efect Joule pe întreaga rezistenţă $(R + R_i)$ a circuitului.

b.Circuit cu generator, receptor şi rezistor (Fig. 5.32

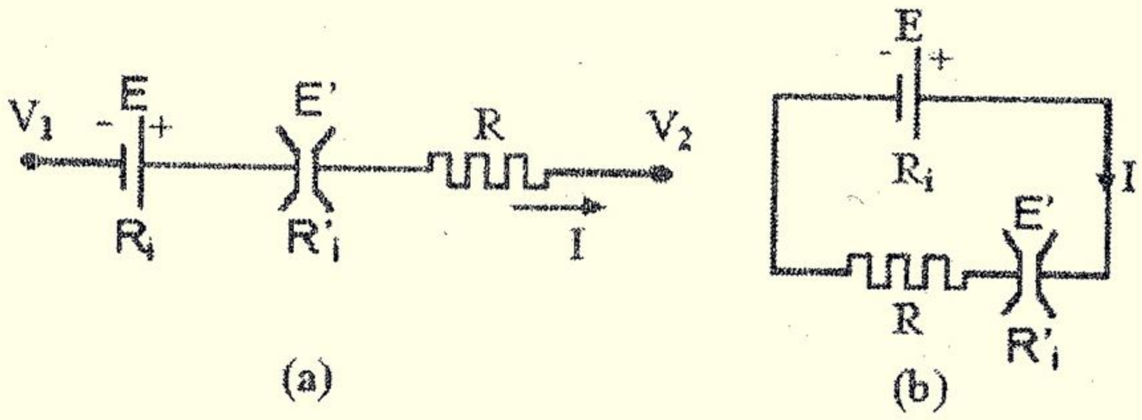


Figura 5.31: Circuit cu generator, receptor şi rezistor: (a)deschis, (b)închis

Legea lui Ohm generalizată pentru o porţiune de circuit care

$$V_1 - V_2 = I\left(R + R_i + R_i'\right) - \mathbf{E} + \mathbf{E}\prime \tag{5.93}$$

conţine generator receptor şi rezistor (Fig. ??), particularizată pentru circuitul închis, (Fig. ??) punând condiţia $V_1 - V_2 = 0$, se scrie sub forma următoare:

$$\mathbf{E} = I\left(R + R_i + R_i'\right) + \mathbf{E}\prime. \tag{5.94}$$

Interpretarea energetică a acestei legi, după multiplicarea formulei (6.94) cu Idt,

$$\mathbf{E}Idt = \left(R + R_i + R_i'\right) I^2 dt + \mathbf{E}\prime Idt \tag{5.95}$$

evidenţiază faptul că energia furnizată de generator ($\mathbf{E}Idt$) se transformă, o parte în căldură prin efect Joule pe întreaga rezistenţă $R_T I^2 dt$ şi cealaltă parte $\mathbf{E}\prime Idt$ este absorbită de receptor.

5.8 Circuite electrice ramificate. Legile lui Kirchhoff

Aplicarea legii lui Ohm generalizate la rezolvarea problemei relaţiei dintre curenţi, tensiuni şi rezistenţe în cazul circuitelor electrice ramificate, conduce la stabilirea unor legi generale, numite legile lui Kirchhoff ; ele oferă posibilitatea simplificării calculelor şi soluţionarea mai comodă a acestei probleme. Un ansamblu de circuite ramificate conţinând generatori, rezistori şi receptori, conectaţi în diferite moduri, serie, paralel, mixt, constituie o *reţea electrică activă*. Să considerăm mai întâi un circuit închis care constituie un

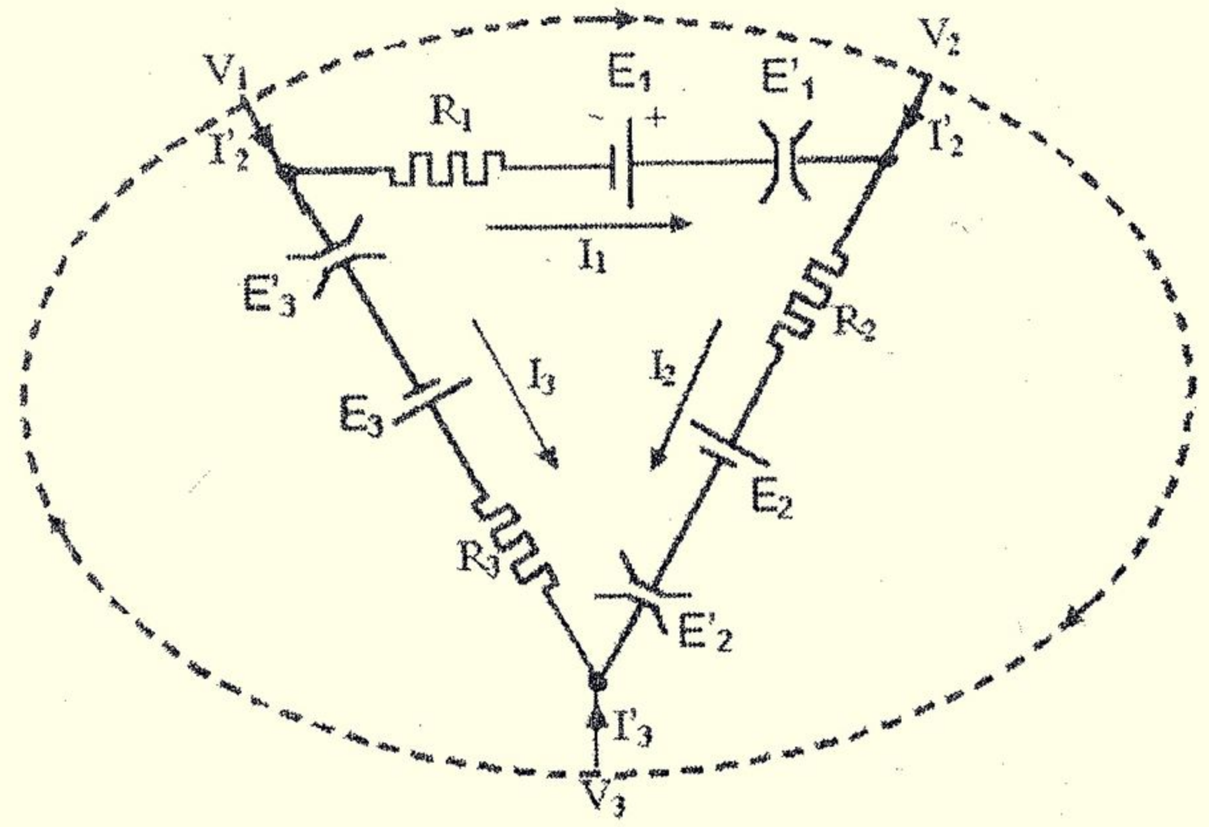


Figura 5.32: Schemă pentru aplicarea legii lui Ohm şi a legilor lui Kirchhoff într-un ochi de reţea activă

"ochi" din reţeaua activă, conţinând generatori, receptori şi rezistori "în serie" conectaţi la potenţialele V_1, V_2 şi V_3. Între aceste noduri de reţea circulă curenţii I_1, I_2 şi I_3 (Fig. 5.32).

Precizăm că sensul acestor curenţi este determinat de totalitatea surselor de curent din interiorul şi din exteriorul reţelei, şi nu de polaritatea generatorilor aflaţi în ochiul de reţea considerat. Sensul curentului pe fiecare ramură a reţelei fiind dat, vom stabili de la început polaritatea receptorilor. Se ştie că în receptori, sensul câmpului contra-electromotor $\vec{E}_{cm}$ trebuie să fie totdeauna opus sensului vectorului $\vec{J}$, deci opus sensului curentului I de pe ramura în care se află receptorul. Din acest motiv *se va considera borna* $(-)$ *a receptorului ca fiind borna din care iese curentul electric.* Acest semn este totdeauna independent de polaritatea generatorilor de pe ramura în care se află receptorul ! Această regulă este aplicată fiecărui receptor din reţea, cum se vede în (Fig. 5.32).

5.8.1 Legea ochiurilor de reţea

Să exprimăm diferenţele de potenţial dintre punctele 1-2, 2-3 şi 3-1, în conformitate cu legea lui Ohm generalizată (formula (5.84)).

$$\begin{aligned} V_1 - V_2 &= R_1 I_1 - E_1 + E_1' \\ V_2 - V_3 &= R_2 I_2 + E_2 + E_2' \\ V_3 - V_1 &= -R_3 I_3 + E_3 - E_3' \end{aligned} \tag{5.96}$$

După efectuarea sumei tuturor termenilor din fiecare membru al acestor egalităţi, obţinem ecuaţia următoare:

$$R_1 I_1 + R_2 I_2 - R_3 I_3 = E_1 - E_2 - E_3 - E_1' - E_2' + E_3' \tag{5.97}$$

Aceasta poate fi scrisă sub următoarea formă generală:

$$\sum\nolimits_k \pm R_k I_k = \sum\nolimits_k (\pm E_k \pm E')_k \tag{5.98}$$

Alegând, în mod arbitrar, sensul de parcurgere a ochiului de reţea în ordinea 1-2-3-1 (reprezentat prin linia punctată din (Fig. 5.32), şi comparând semnele termenilor corespondenţi din egalităţile (5.98) şi (5.99), observăm că semnele termenilor din relaţia generală (5.99) se supun următoarelor reguli:

1) *Produsele $R_k I_k$ au semnul (+) dacă sensul curentului prin rezistenţa R_k coincide cu sensul de parcurgere, şi semnul (-) dacă sensul curentului prin R_k este opus sensului de parcurgere a ochiului de reţea.*

2) *Tensiunile electromotoare E_k au semnul (+) dacă sensul de parcurgere iese din borna (+) a generatorului, şi semnul (-)ând sensul de parcurgere iese din borna (-).*

3) *Aceleiaşi regulă a semnelor tensiunilor electromotoare E_k se supun şi tensiunile contra-electromotoare E_k' ale receptorilor.*

Relaţia (5.99), dintre curenţii, rezistenţele, tensiunile electromotoare şi contra-electromotoare, constituie o lege generală pentru orice ochi de reţea cu condiţia respectării regulilor menţionate mai sus, referitoare la semnele termenilor. Ea este numită *legea ochiurilor de reţea.*

5.8.2 Legea nodurilor de reţea

Notăm cu I_1', I_2' şi I_3' curenţii care, provenind de la surse exterioare ochiului de reţea considerat, intră prin nodurile reţelei (notate în (Fig. 5.33) cu numerele (1) (2) şi (3)). Condiţia de ne-acumulare de sarcini electrice în aceste noduri ne obligă să scriem relaţiile dintre curenţii care intră în noduri şi curenţii care ies din aceste noduri, sub forma următoare:

$$I_1' = I_1 + I_3 \qquad I_2' = I_2 - I_1 \qquad I_3' = -I_2 - I_3 \tag{5.99}$$

Aceste relaţii pot fi scrise sub următoarea formă generală:

$$\sum\nolimits_k \pm I_k = 0, \tag{5.100}$$

în care *se consideră cu semnul (+) curenţii care intră în nodul de reţea şi cu semnul (-) curenţii care ies din nod. Relaţia (5.101) este numită legea nodurilor de reţea.* Ambele legi, (5.99) şi (5.101) *sunt cunoscute sub numele de legile lui Kirchhoff.*

5.8.3 Modalităţi de aplicaţie a legilor lui Kirchhoff

Vom considera ca exemplu o reţea activă întâlnită mai frecvent în cazul general al "punţilor" utilizate pentru măsurarea diferitelor mărimi electrice. Se numeşte punte o reţea constituită dintr-un ansamblu de patru ramuri care formează un patrulater şi alte două ramuri constituind diagonalele patrulaterului. Pe fiecare dintre cele şase ramuri pot să existe rezistori, generatori şi receptori. Într-un caz particular ne vom limita aici la studiul punţilor utilizate pentru măsurări de rezistenţe, având ca sursă de curent un generator de t.e.m E cu rezistenţa proprie ρ pe una dintre diagonalele patrulaterului şi, ca instrument de măsură, un galvanometru cu rezistenţa proprie g pe cealaltă diagonală (Fig. 5.33). Laturile patrulaterului sunt constituite din patru rezistori dintre care unul are rezistenţă necunoscută x iar celelalte trei laturi conţin rezistenţele R, a şi b cunoscute; una dintre acestea, R, este reglabilă. Acest circuit de măsură se numeşte *puntea lui Wheatstone.* Pentru o anumită valoare a rezistenţei R, curentul i prin galvanometru se anulează. Teoretic, problema determinării rezistenţei necunoscute x constă în a găsi expresia curentului i în funcţie de valorile tuturor celorlalte elemente constitutive ale punţii, punând apoi condiţia de anulare a acestui curent. Pentru aceasta vom folosi metoda generală a ecuaţiilor lui Kirchhoff, nu fără a menţiona însă că mai există şi alte metode simplificatoare.

1) *Metoda ecuaţiilor lui Kirchhoff.* Cele şase ramuri ale punţii lui Wheatstone din (Fig. 5.33) sunt parcurse de şase curenţi. Pentru determinarea lor sunt necesare şase ecuaţii. Legea ochiurilor de reţea (6.98), aplicată celor trei ochiuri ale reţelei din Fig.VI.34, şi legea nodurilor aplicată nodurilor A, M şi N, conduc la următoarele şase ecuaţii:

$$\begin{array}{ll} Ri_1 + gi - ai_4 = 0 & i_5 = i_1 + i_4 \\ xi_2 + bi - gi = 0 & i_1 = i_2 + i \\ ai_4 + bi_3 + \rho i_5 = 0 & i_3 = i_4 + i \end{array} \tag{5.101}$$

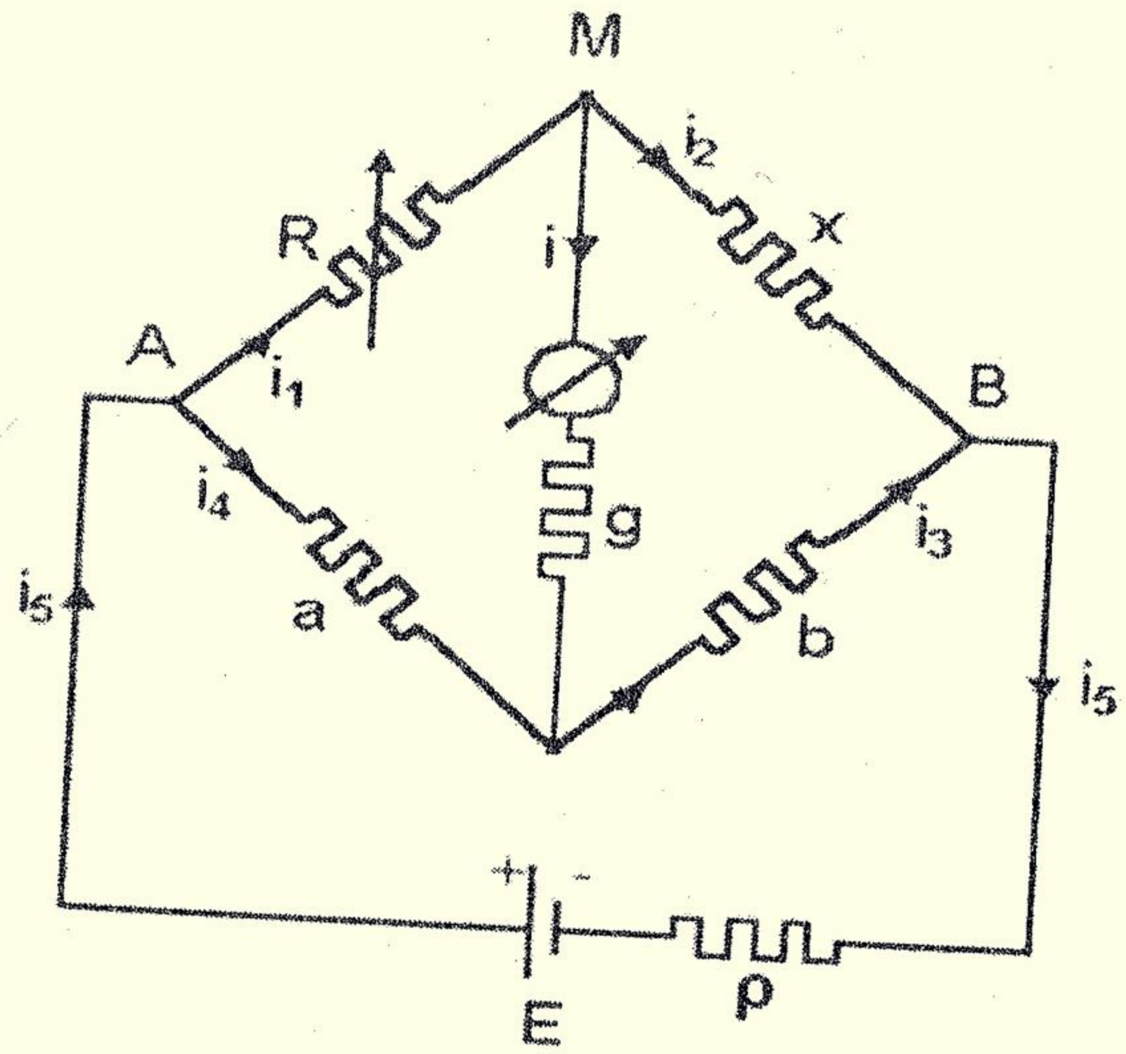


Figura 5.33: Schema punţii lui Wheatstone pentru măsurarea rezistenţelor. Aplicaţie a legilor lui Kirchhoff.

Curentul i prin diagonala pe care se află galvanometrul este dat de expresia următoare:

$$i = E\frac{ax - bR}{g\,(R+x)\,(a+b) + \rho\,(R+a)\,(x+b) + \rho g\,(a+b+x+R) + \Delta} \tag{5.102}$$

în care

$$\Delta = Rx\,(a+b) + ab\,(R+x) \qquad sau \qquad \Delta = bx\,(a+R) + aR\,(b+x)$$

Pentru o anumită valoare a lui R, curentul prin galvanometru este adus la zero, $(i = 0)$ şi, în acest caz, se consideră că puntea este echilibrată. În mod corespunzător, ecuaţia (5.103) conduce la următoarea expresie care permite să se determine valoarea rezistenţei necunoscute x în funcţie de valorile rezistenţelor cunoscute R, a şi b:

$$x = \frac{b}{a}R \tag{5.103}$$

Se observă imediat din această relaţie că, puntea lui Wheatstone poate fi adusă la echilibru independent de valoarea t.e.m. E a generatorului şi de

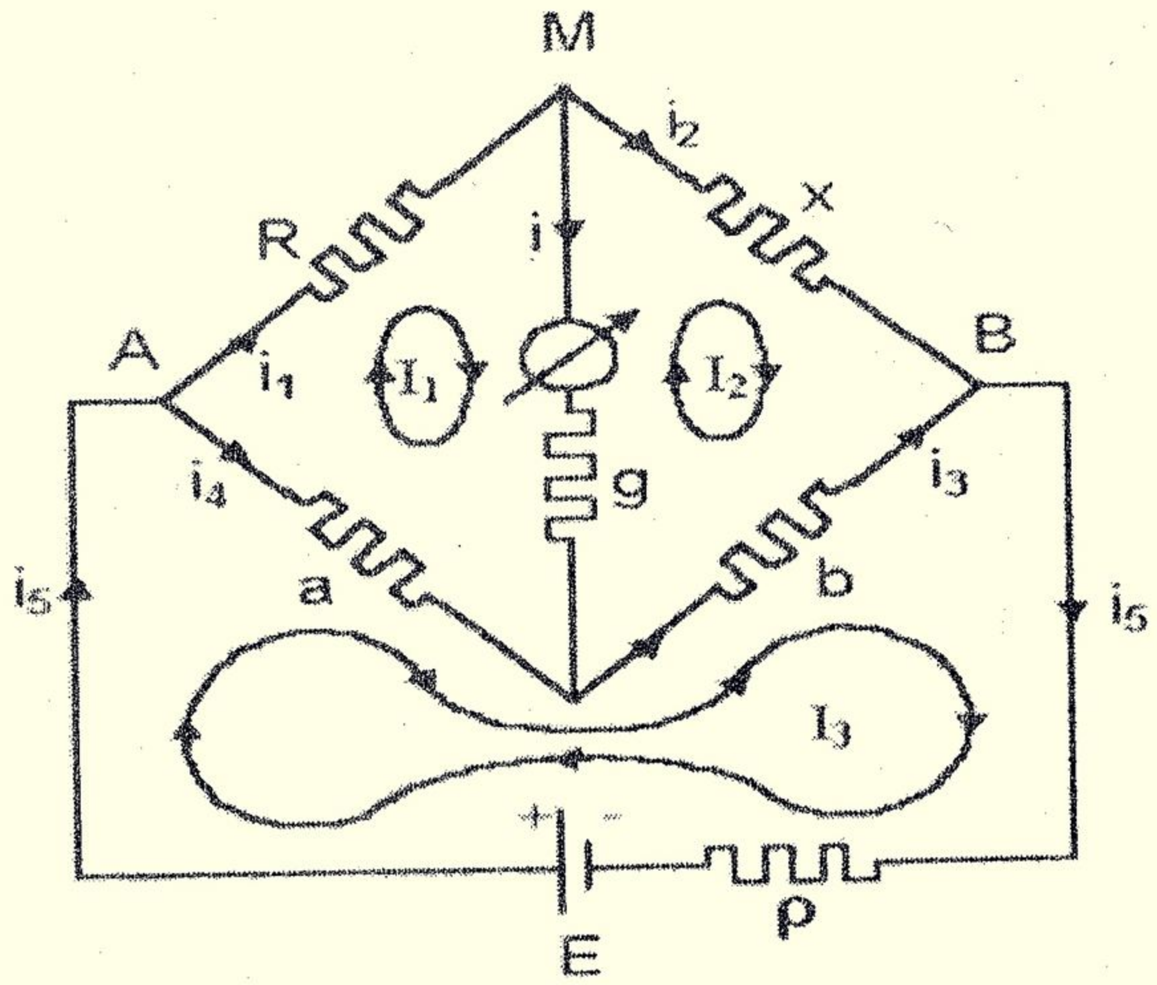


Figura 5.34:

valoarea rezistenţei sale interioare ρ. În plus echilibrul punţii nu depinde nici de valoarea rezistenţei g a instrumentului de măsură. Problema sensibilităţii măsurării rezistenţei x nu poate fi discutată independent de valorile acestor rezistenţe.

2) *Metoda curenţilor ciclici.* Această metodă simplifică aplicaţia legilor lui Kirchhoff prin înlocuirea curenţilor din fiecare ramură a reţelei cu nişte curenţi fictivi, închişi în fiecare ochi al reţelei. În cazul punţii lui Wheatstone, (Fig. **??**), considerăm curenţii fictivi I_1 respectiv I_2 şi I_3 închişi în ficare dintre cele trei ochiuri ale punţii şi, aplicând legea ochiurilor de reţea (6.93), găsim următoarele trei ecuaţii:

$$\begin{aligned} RI_1 + g\,(I_1 - I_2) + a\,(I_1 - I_3) &= 0 \\ xI_2 + b\,(I_2 - I_3) + g\,(I_2 - I_1) &= 0 \\ \rho I_3 + a\,(I_3 - I_1) + b\,(I_3 - I_2) &= -E \end{aligned} \tag{5.104}$$

După ce au fost determinate valorile curenţilor I_1, I_2 şi I_3, se obţin valorile celor şase curenţi din ramurile punţii, identificându-i în funcţie de aceşti trei curenţi fictivi în conformitate cu relaţiile:

$$\begin{aligned} &i_1 = I_1; \qquad i_2 = I_2; \qquad i_3 = -I_2 + I_3; \qquad i_4 = I_3 - I_1; \\ &i_5 = I_3; \qquad i = I_1 - I_2 \end{aligned} \tag{5.105}$$

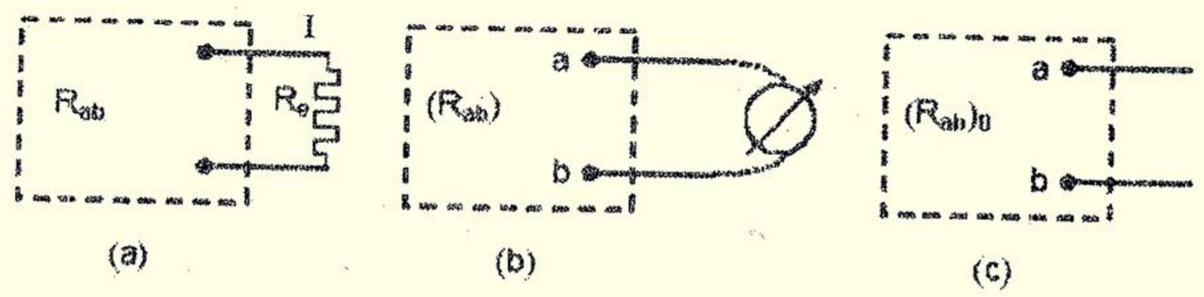


Figura 5.35: Schemă pentru aplicarea teoremei lui Thévenin în cazul unei reţele active: (a) Reţeaua activă, (b) tensiunea măsurată "în gol" în punctele a,b ale reţelei pasive (c) Rezistenţa reţelei pasivizate $(R_{a,b})_0$, măsurată între punctele a, b în absenţa rezistenţei exterioare R_e

Condiţia de echilibru a punţii, $i = 0$, se reduce în acest caz la condiţia $I_1 = I_2$ care conduce la aceeaşi relaţie (??6.98)).

5.9 Teoreme ajutătoare pentru calculul curenţilor şi al tensiunilor din reţelele electrice. Aplicaţii

Există o serie de teoreme care oferă posibilitatea de a determina direct curentul sau tensiunea pe o ramură a unei reţele complexe alcătuite din rezistori şi generatori. O astfel de reţea, numită *reţea activă*, poate să se transforme într-o *reţea pasivă* dacă se înlătură sursele (generatorii) înlocuindu-le cu rezistenţele lor proprii.

1)- **Teorema lui Thévenin** (sau teorema generatorului echivalent de tensiune):

Considerăm două puncte a şi b ale unei *reţele active* (Fig. 5.35) şi măsurăm tensiunea $(U_{ab})_0$, şi rezistenţa totală a *reţelei pasive* $(R_{ab})_0$ localizată între aceleaşi puncte. Conform teoremei lui Thévenin, o rezistenţă R_e exterioară reţelei, conectată între punctele a şi b, va fi parcursă de un curent I dat de expresia

$$I = \frac{(U_{ab})_0}{(R_{ab})_0 + R_e} \tag{5.106}$$

Teorema lui Thévenin se enunţă în felul următor: *Curentul I care străbate o rezistenţă R_e cuprinsă între două puncte a, b ale unei reţele active* (Fig.37.a), *este egal cu raportul dintre tensiunea măsurată "în gol"* (în absenţa rezistenţei R_e) *la bornele a, b* (Fig. ?? *şi suma rezistenţelor R_e (exterioară*

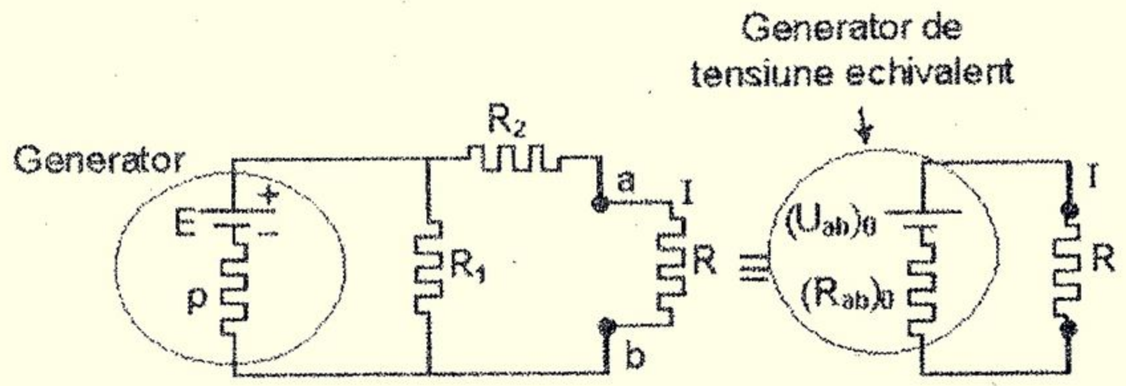


Figura 5.36: Exemplu de aplicaţie a teoremei lui Thevenin în cazul unei reţele active

reţelei) şi $(R_{ab})_0$ *(rezistenţa reţelei pasivizate văzute din exterior în punctele* a, b *(Fig. ??).*

Această teoremă permite să se calculeze imediat curentul debitat de o reţea activă, oriât de complexă ar fi aceasta, printr-o rezistenţă R_e, fără a mai fi necesară cunoşterea valorilor curenţilor din interiorul reţelei.

Exemplu: Fie o reţea simplă, (Fig. 5.36) constituită dintr-un generator, având t.e.m. E cu rezistenţa interioară ρ, şi rezistorii R_1, şi R_2, şi un rezistor R conectat între două puncte a şi b ale reţelei. Pentru a exprima direct curentul prin rezistenţa R, este suficient să evaluăm tensiunea "în gol" (în absenţa rezistenţei R) dintre aceste două puncte, sau aşa numita tensiune a generatorului echivalent

$$(U_{ab})_0 = \frac{E}{\rho + R_1} R_1$$

şi totodată rezistenţa "în gol" a reţelei pasivizate văzută din punctele a şi b, (în care sursa activă E este înlocuită cu propria sa rezistenţă ρ)

$$(R_{ab})_0 = R_2 + \frac{\rho R_1}{\rho + R_1},$$

Cu aceste expresii formula (6.101) dă:

$$I = \frac{E\frac{R_1}{\rho+R_1}}{R_2 + \frac{\rho R_1}{\rho+R_1} + R} = E\frac{R_1}{(\rho + R_1)(R2 + R) + \rho R_1}$$

Exerciţiu: Să se determine acest curent utilizând numai legile lui Kirchhoff

2) Teorema lui Norton (sau teorema generatorului echivalent de curent): Considerăm două puncte a şi b ale unei reţele active între care dorim

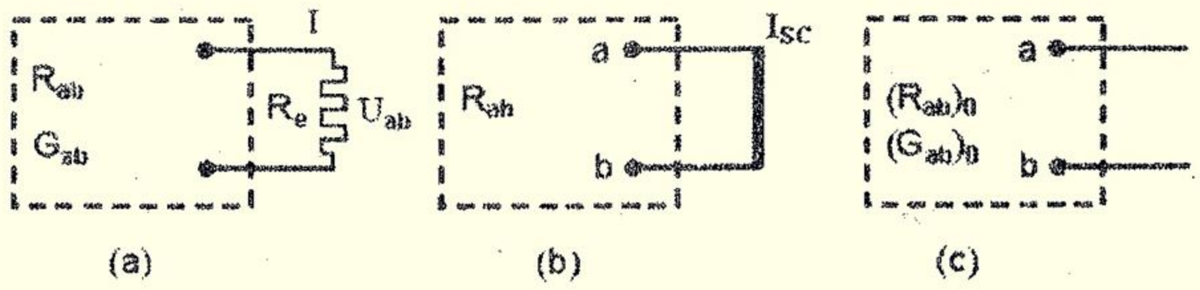


Figura 5.37: Schema pentru aplicarea teoremei lui Norton: (a) Reţea activă, (b) Curentul de scurt-circuit I_{sc} între punctele a, b. (c) Rezistenţa între punctele a, b, $(R_{ab})_0$ respectiv conductanţa $(G_{ab})_0$ a reţelei pasivizate (măsurate în absenţa rezistenţei R_e)

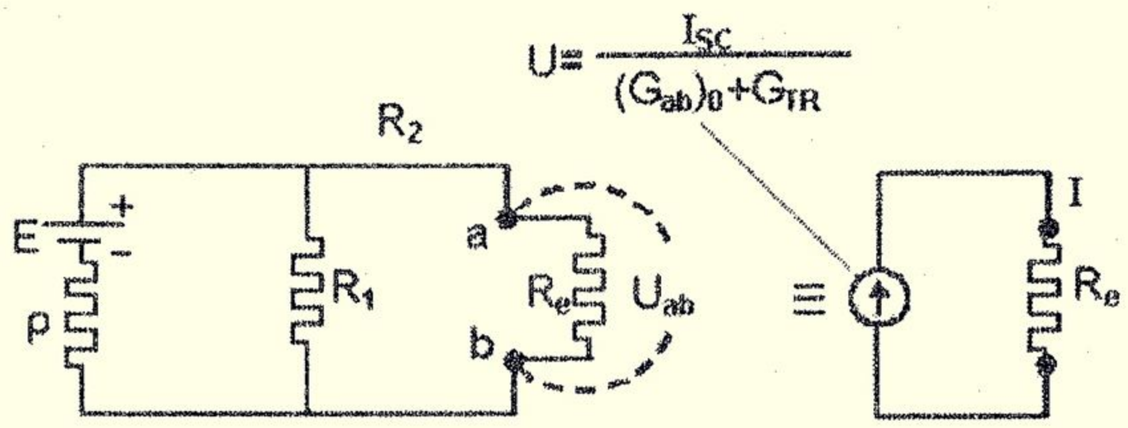


Figura 5.38: Exemplu de aplicaţie a teoremei lui Norton în cazul unei reţele active

să evaluăm tensiunea U_{ab} (Fig. 5.37(a)). Măsurăm mai întâi intensitatea curentului I_{sc} debitat de reţea în condiţiile scurt-circuitării reţelei între aceste puncte (Fig. 5.37(b)). Evaluăm apoi conductanţa reţelei "pasivizate" $(G_{ab})_0$ văzute din punctele a şi b (Fig. 5.37(c)). Conform teoremei lui Norton, o rezistenţă R_e exterioară reţelei, conectată între punctele a şi b, se va afla la o tensiune U_{ab} dată de expresia:

$$U_{ab} = \frac{I_{sc}}{(G_{ab})_0 + G_e} \tag{5.107}$$

în care $G_e = 1/R_e$ reprezintă conductanţa rezistorului exterior R_e. Enunţ:

Tensiunea de la bornele unei rezistenţe conectate între două puncte ale unei reţele active este egală cu raportul dintre curentul debitat de reţea la scurt-circuit (unind cele două puncte) şi conductanţa totală a reţelei pasivizate văzută din cele două puncte.

Exemplu Considerând reţeaua activă din (Fig. 5.38), expresia curentului debitat de reţea în condiţiile scurtcircuitării reţelei între punctele a şi b este

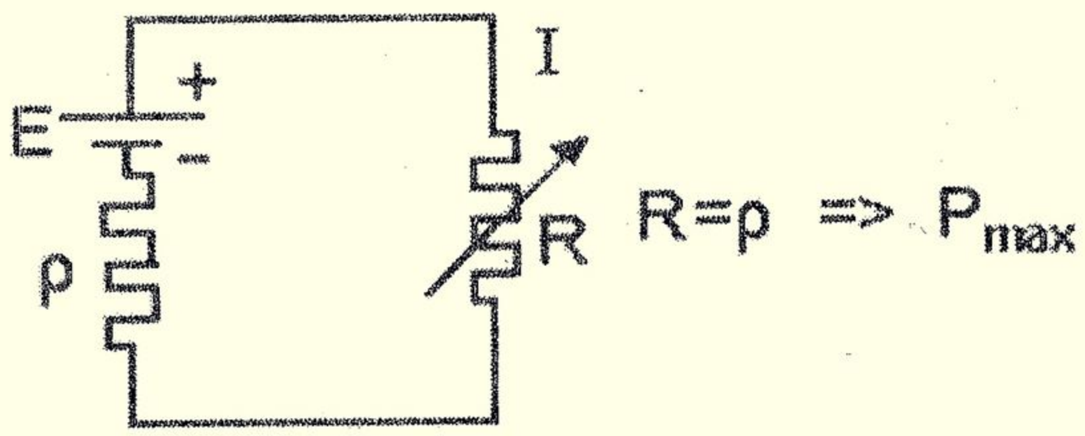


Figura 5.39: Puterea transferată rezistenţei R este maximăând $R = \rho$

$$I_{sc} = \frac{E}{\rho}$$

Cu expresiile conductanţei reţelei pasivizate "în gol" şi respectiv a rezistorului exterior,

$$(G_{ab})_0 = \frac{1}{\rho} + \frac{1}{R_1} \qquad \text{şi} \qquad G_e = \frac{1}{R_e}$$

teorema lui Norton (6.102) dă imediat expresia tensiunii de la bornele rezistorului exterior:

$$U_{ab} = \frac{\frac{E}{\rho}}{\frac{1}{\rho} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_e}} = E\frac{R_1 R_e}{\rho\,(R_1 + R_e) + R_1 R_e}$$

3) Teorema transferului maxim de putere

Puterea pe care un generator, având t.e.m. E şi rezistenţa interioară ρ, o transferă unei reţele pasive a cărei rezistenţă totală este R (Fig. 5.39, *capătă valoarea maximă dacă rezistenţa interioară a generatorului este egală cu rezistenţa exterioară R.* Într-adevăr, intensitatea curentului debitat de sursă în reţea, fiind

$$I = \frac{E}{\rho + R}, \tag{5.108}$$

expresia puterii transferate reţelei este:

$$P = RI^2 = E^2\frac{R}{(\rho + R)^2} \tag{5.109}$$

Considerând că rezistenţa reţelei R este variabilă, condiţia ca această putere să fie maximă corespunde anulării derivatei lui P. Cu $\frac{\partial P}{\partial R} = 0$ această condiţie este

$$R = \rho \tag{5.110}$$

Randamentul acestui transfer maxim de putere η este raportul dintre puterea disponibilă P' şi puterea P a sursei. Pentru $R = \rho$ acest randament este:

$$\eta = \frac{P'}{P} = \frac{EI - RI^2}{EI} = 1 - \frac{RI}{E} = 1 - \frac{R}{\rho + R} = \frac{1}{2} = 50\% \qquad (5.111)$$

Problema transferului maxim de putere prezintă un interes deosebit în cazurile în care sursa este de putere slabă şi rezistenţa internă foarte mică; de exemplu cazul unui cuplu termoelectric. Acesta este un dispizitiv constituit din două metale diferite sudate într-un punct. Când se încălzeşte sudura, apare o t.e.m. între extremitaţile libere ale metalelor. Măsurarea în condiţii optime a tensiunii unei astfel de surse necesită utilizarea unui instrument de măsură a cărui rezistenţă internă să fie de ordinul de mărime al rezistenţei electrice a sudurii cuplului termoelectric. Această rezistenţă este în general foarte mică. În caz contrar, instrumentul riscă sa nu poată indica nici o deviaţie deoarece puterea solicitată de instrument, pentru a produce deviaţia sistemului său mobil, este mult prea mare faţă de puterea maximă pe care o poate oferi termo-cuplul.

4) Teorema suprapunerii stărilor de echilibru al curenţilor în reţele

Dat fiind caracterul linear al legilor lui Kirchhoff relativ la intensităţile şi tensiunile electromotoare din reţele, se poate afirma că suprapunerea mai multor stări de echilibru constituie deasemenea o stare de echilibru. În particular, *intensitatea curentului printr-o ramură a unei reţele, datorată prezenţei simultane a mai multor surse de tensiune electromotoare în reţea, este suma intensităţilor curenţilor trimişi în acea ramură de fiecare sursă. în parte, în timp ce toate celelalte surse de t.e.m au fost scoase din reţea şi înlocuite cu rezistenţele lor proprii.*

Pentru a da un exemplu de aplicare a acestei teoreme, considerăm reţeaua din (Fig. 5.40(b)), în care o t.em. necunoscută, e, este pusă în opoziţie cu o d.d.p, rI reglabilă şi cunoscută, produsă de o t.e.m.E, pe o porţiune a reţelei. Se reglează d.d.p., respectiv rezistenţa r astfel înât un galvanometru, a cărui rezistenţă proprie este g, conectat în serie cu d.d.p. şi cu t.e.m. e aflate în opoziţie, să indice absenţa curentului i prin ramura galvanometrului. În acest caz avem egalitatea:

$$e = rI. \qquad (5.112)$$

Deoarece, la echilibru, curentul I este constant, (atât timp ât E şi R sunt constante şi cunoscute), acest procedeu oferă posibilitatea de a măsura

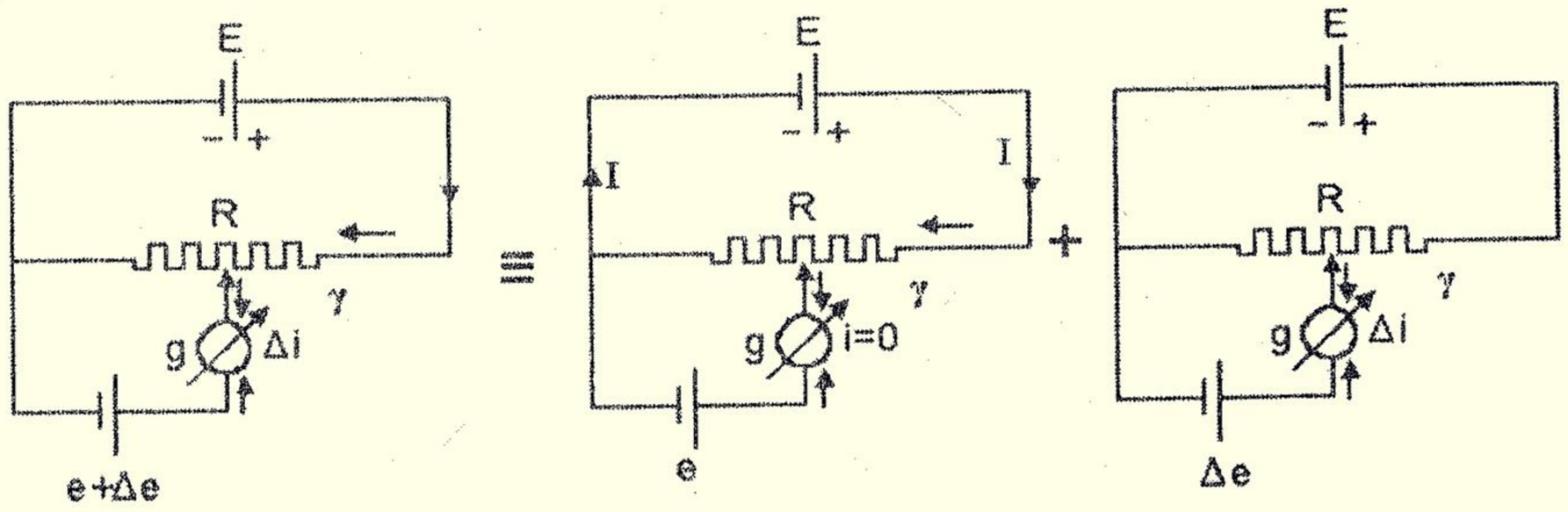


Figura 5.40: Schemă pentru aplicarea teoremei suprapunerii stărilor de echilibru a curenţilor în cazul metodei de opoziţie a tensiunilor

o t.e.m. oarecare e în funcţie de valoarea rezistenţei r la echilibru (ând $i = 0$). Această *metodă de opoziţie* devine una dintre cele mai precise metode de măsurare a t.e.m sau a d.d.p. Când acestea sunt comparate cu o t.e.m. cunoscută cu mare precizie luată ca referinţă. În metrologie se utilizează elementul normal Weston; acesta, constituit din doi electrozi de Cd şi Hg într-o soluţie de $CdSO_4$, furnizează o t.e.m. constantă $e_n = 1,01860$ volţi. Înlocuind t.e.m. de măsurat e, cu t.e.m. etalon e_n, anularea curentului prin galvanometru va avea loc pentru o anumită valoare r' astfel încât

$$e_n = r'I \tag{5.113}$$

Eliminând curentul I din relaţiile (5.113) şi (5.114), obţinem expresia t.e.m. necunoscute e în funcţie de mărimi care, în condiţiile experimentale specificate, pot fi cunoscute cu o precizie foarte mare:

$$e = e_n \frac{r}{r'} \tag{5.114}$$

Pentru a defini *sensibilitatea măsurării* lui e presupunem că provocăm un mic dereglaj al echilibrului, variind rezistenţa r cu Δr. Galvanometrul, care iniţial indica absenţa curentului ($i = 0$), va indica acum un curent Δi. Sensibilitatea măsurării, σ, va fi mare dacă, o slabă variaţie relativă $\Delta r/r$ a rezisteţei r, provoacă o variaţie mare a curentului Δi, respectiv a deviaţiei galvanometrului. Aceeaşi sensibilitate σ va fi mare dacă unei variaţii slabe Δe a te.m. e îi va corespunde un curent Δi mare (Fig. 5.40(a)). Preferând a doua variantă dintre cele două expresii ale sensibilităţii de măsură a t.e.m.,

$$\sigma = \frac{\Delta i}{\Delta r/r} \qquad \sigma = \frac{\Delta i}{\Delta e} \tag{5.115}$$

vom determina relativ simplu curentul Δi, utilizând teorema suprapunerii stărilor de echilibru (Fig. 5.40): Din (Fig. 5.40(c)) se deduce imediat că

$$\Delta i = \frac{\Delta e}{g + \frac{r(R-r)}{R}}$$

Sensibilitatea $\sigma = \Delta i/\Delta e$ este minimă dacă expresia de la numitor, $g + r(R-r)/R$ este maximă. Anularea derivatei acestei expresii, în raport cu variabila r, conduce la condiţia de extremum $r = R/2$. Rezultă că sensibilitatea măsurării este minimă dacă poziţia cursorului, pentru care se obţine anularca curentului prin galvanometru, se află la jumătatea rezistenţei R. În concluzie, *sensibilitatea măsurărilor de tensiune prin metoda opoziţiei este mare dacă anularea curentului prin instrumentul indicator de nul are loc pentru valori ale rezistenţei r ât se poate mai depărtate de valoarea rezistenţei* $R/2$.

5) Teorema transfigurării reţelelor.

Transfigurarea unei reţele constă în a modifica o parte din reţea pentru a simplifica determinarea curenţilor din porţiunea rămasă ne-modificată, în timp ce, distribuţia curenţilor şi a tensiunilor din această porţiune trebuie să rămână neschimbată în urma acestei operaţii. Se poate demonstra că un element de reţea, care constituie o stea cu un număr de n ramuri, fără tensiuni electromotoare, poate fi înlocuit printr-un poligon complet ale cărui $n(n-1)/2$ rezistenţe ale laturilor se exprimă în funcţie de cele n rezistenţe din ramurile stelei. Transformarea reciprocă nu este însă valabilă deât cu condiţia ca steaua echivalentă să aibă cel puţin atâtca ramificaţii âte laturi are poligonul. Această condiţie $n(n-1)/2 \leq n$ nu poate fi satisfăcută deât pentru $n = 2$ şi $n = 3$. În consecinţă numai varianta $n = 3$ poate fi luată în consideraţie, aceasta reprezentând o transformare rerciprocă "stea-triunghi" simbolizată ca $Y \rightleftarrows \Delta$. Presupunem un element de reţea (Fig. 5.41), constituind o stea cu trei ramuri având rezistenţele R_1, R_2 şi R_3 conectate în trei puncte ale reţelei, (notate cu 1, 2 şi 3), în care potenţialele sunt respectiv V_1, V_2 şi V_3, şi considerăm totodată şi triunghiul echivalent stelei cu vârfurile în aceleaşi puncte ale reţelei, constituit din rezistenţele R_{12}, R_{23} şi R_{31} (indicii sunt comutabili, reprezentând numai punctele între care se află aceste rezistenţe). Punând condiţia ca diferenţa de potenţial dintre fiecare pereche de puncte corespondente din ambele scheme să fie aceeaşi, stabilim următoarele ecuaţii între rezistenţele aflate la aceeaşi d.d.p.

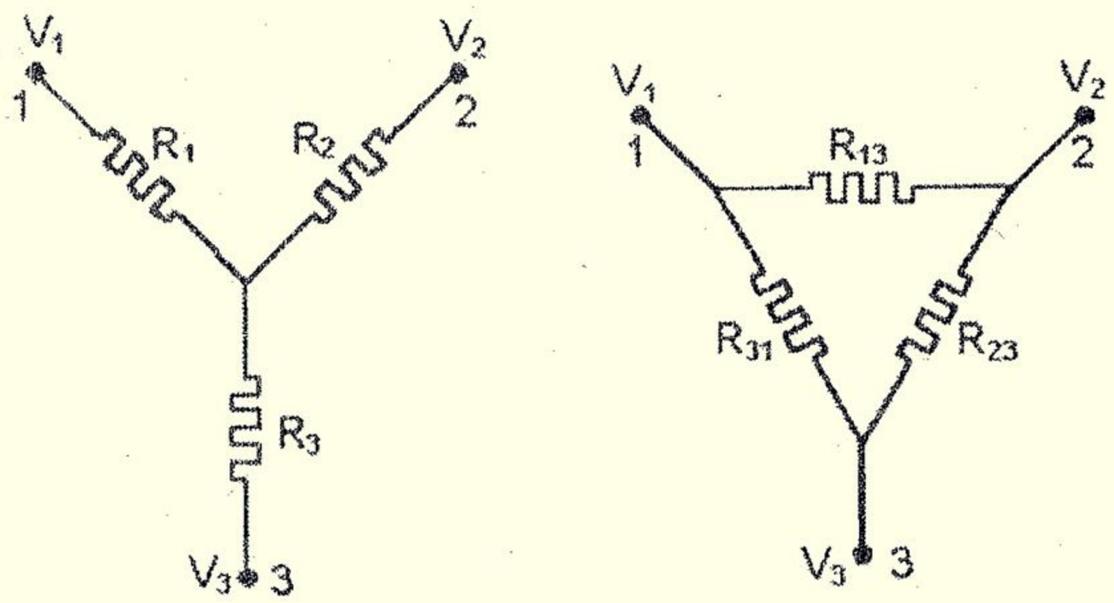


Figura 5.41: Scheme echivalente în transformarea stea-triunghi a reţelelor

$$R_1 + R_2 = \frac{R_{12}\,(R_{23} + R_{31})}{P} \tag{5.116}$$

$$R_1 + R_2 = \frac{R_{12}\,(R_{23} + R_{31})}{P}$$

$$R_1 + R_2 = \frac{R_{12}\,(R_{23} + R_{31})}{P}$$

De aici, deducem următoarele relaţii pentru *transfigurarea reţelei din triunghi în stea*, datele iniţiale fiind valorile rezistenţelor R_{12}, R_{23} şi R_{31} din configuraţia în triunghi:

$$R_1 = \frac{R_{12}R_{13}}{P}, \qquad R_2 = \frac{R_{21}R_{23}}{P}, \qquad R_3 = \frac{R_{31}R_{32}}{P} \tag{5.117}$$

în care

$$P = R_{12} + R_{23} + R_{31}$$

Pentru *transfigurarea reţelei din stea în triunghi*, datele iniţiale fiind valorile rezistenţelor R_1, R_2 şi R_3 din configuraţia în triunghi, deducem din (6.111) următoarele relaţii de transformare:

$$R_{12} = \frac{R_1R_2}{Q}; \qquad R_{23} = \frac{R_2R_3}{Q}; \qquad R_{31} = \frac{R_3R_1}{Q} \tag{5.118}$$

în care

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

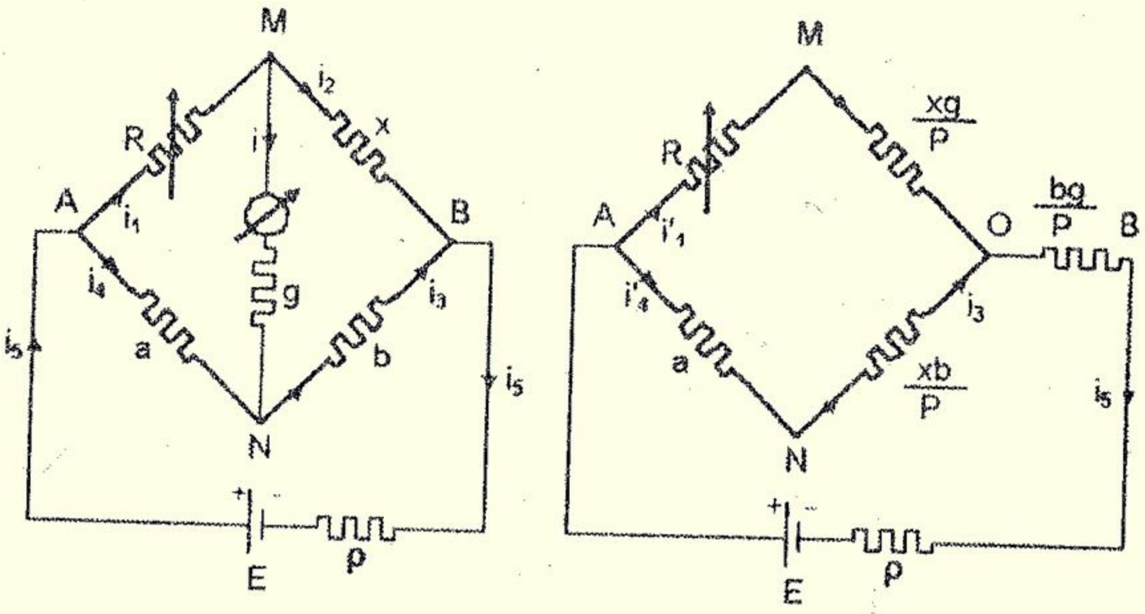


Figura 5.42: *Aplicaţie a transformării stea-triunghi pentru calculul curenţilor din puntea lui Wheatstone*

Exemplu.: În puntea lui Wheatstone (Fig. 5.33, calculul curentului i din ramura MN în care se află galvanometrul poate fi efectuat mai simplu, transfigurând triunghiul MBN într-o stea echivalentă ca în (Fig. 5.42. În acest caz se calculează mai întâi curentul total i_5, apoi d.d.p. dintre punctele A, O şi curenţii i'_1 şi i'_4, după care urmează să calculăm diferenţele de potenţial $U_{AN} = V_A - V_N$ şi $U_{AM} = V_A - V_M$. Diferenţa de potenţial dintre punctele N şi M este $V_N - V_N = U_{AM} - U_{AN}$. Raportând această d.d.p. la rezistenţa galvanometrului, se obţine în final expresia curentului i prin ramura galvanometrului:

$$i = \frac{V_N - V_M}{g}, \tag{5.119}$$

care este efectiv expresia echivalentă (5.98).

Condiţia de echilibru a punţii, $i = 0$, corespunde egalităţii potenţialelor $V_N = V_M$, respectiv egalităţii diferenţelor de potenţial $U_{AM} = U_{AN}$. În particular, notând cu U_{AO} d.d.p. dintre punctele A şi O, şi cu i'_1 şi i'_4 curenţii prin ramurile AMO şi ANO, obţinem expresiile:

$$U_{AM} = Ri'_1 = R\frac{U_{AO}}{R + \frac{gx}{P}} \qquad \text{şi} \qquad U_{AN} = ai'_4 = a\frac{U_{AO}}{a + \frac{gb}{P}}$$

în care $P = x + b + g$.
De aici, condiţia de echilibru a punţii, $U_{AM} = U_{AN}$, conduce imediat la relaţia cunoscută (6.103), $x/R = b/a$.

5.10 Distribuţii spaţiale de curent

5.10.1 Analogii între distribuţiile spaţiale ale câmpurilor şi ale curenţilor în mediile dielectrice şi conductoare

Într-un caz general, problema distribuţiei spaţiale a curentului electric a fost expusă în § 6.5 Relaţiiile (5.55) şi (5.56) stabilite în acest paragraf, respectiv $dI/\gamma = dQ/\varepsilon$ şi $RC\gamma = \varepsilon$ sunt suficient de generale pentru a fi utile deopotrivă la calculul rezistenţei sau al capacităţii pentru configuraţii geometric identice ale suprafeţelor echipotenţiale într-un mediu conductor omogen sau într-un dielectric omogen. Totodată aceste relaţii sunt independente de forma electrozilor.

O comparaţie între legile fundamentale ale electrostaticii şi ale electrocineticii, făcută în tabelul alăturat, pune în relief, într-o manieră mai generală, legile distribuţiei spaţiale ale câmpurilor şi curenţilor în mediile dielectrice şi în mediile conductoare

Electrostatica mediilor dielectrice	Electrocinetica mediilor conductoare
$\vec{E} = -gradV, \quad rot\,\vec{E} = 0$	$\vec{E} = -gradV, \quad rot\,\vec{E} = 0$
Vectorul inducţie electrică $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$	Vectorul densitate de curent $\vec{J} = \gamma\vec{E}$
$\Phi = \int_s \vec{D}\cdot d\vec{S}$	$I = \int_s \vec{J}\cdot d\vec{S}$
$div\,\vec{D} = 0$ (în absenţa sarcinilor) sau $\Delta V = 0$ $\vec{D}_n$ continuu	$div\,\vec{D} = 0$ (ρ constant) sau $\Delta V = 0$ $\vec{J}_n$ continuu
Circulaţia vectorului $\vec{E}$ $V_1 - V_2 = \frac{1}{C}\int \vec{D}\cdot d\vec{S} = \frac{Q}{C}$ cu $\frac{1}{C} = \int \frac{1}{\int_1^2 \frac{dl}{\varepsilon_0 dS}}$	Circulaţia vectorului $\vec{E}$ $V_1 - V_2 = R\int \vec{J}\cdot d\vec{S} = RI$ cu $\frac{1}{R} = \int \frac{1}{\int_1^2 \frac{dl}{\gamma dS}}$
Refracţia liniilor de câmp şi de inducţie electrică $\frac{tg\alpha_1}{\varepsilon_1} = \frac{tg\alpha_2}{\varepsilon_2}$	Refracţia liniilor de âmp şi de curent electric $\frac{tg\alpha_1}{\gamma_1} = \frac{tg\alpha_2}{\gamma_2}$

Câmpurile şi potenţialele fiind aceleaşi în mediile dielectrice şi conductoare, există o analogie între mărimile:

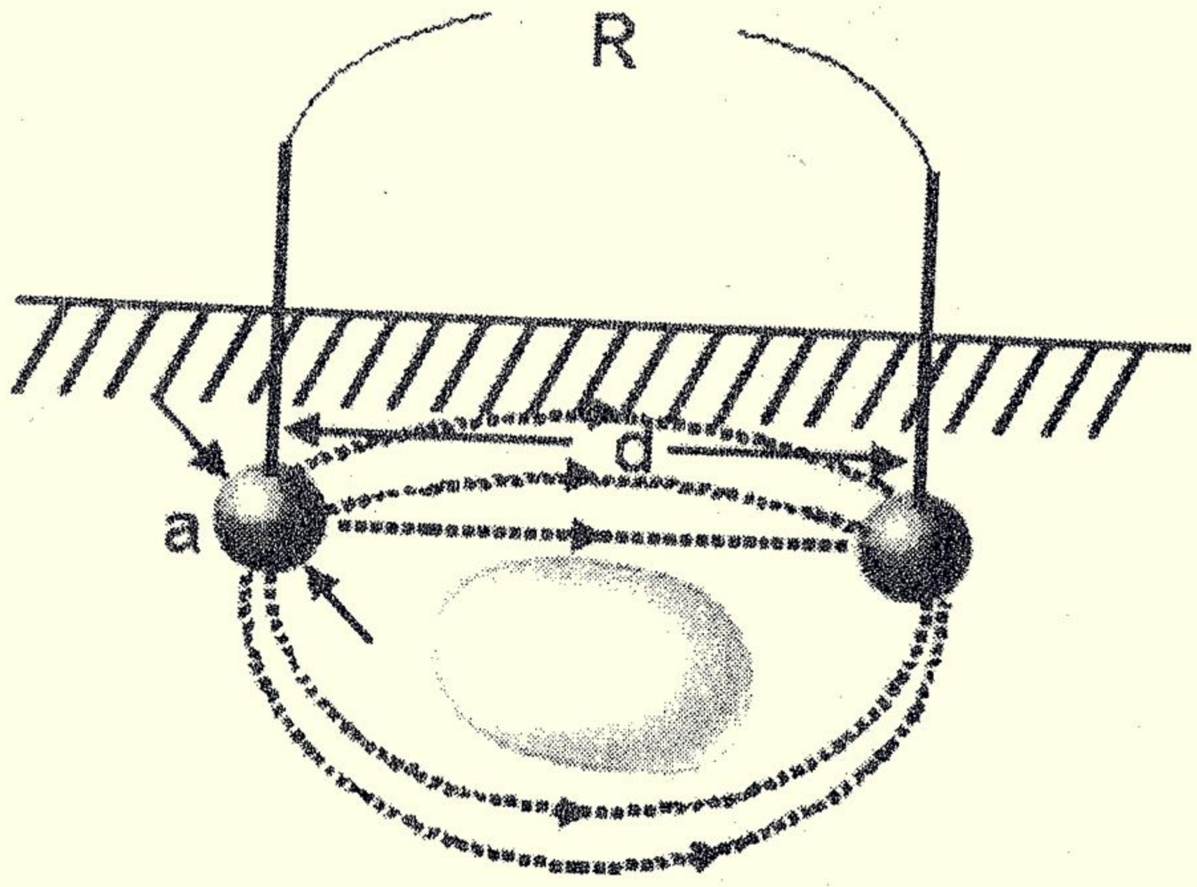


Figura 5.43: Schema pentru măsurarea rezistivităţii solului

$\vec{D}(C/m^2)$	şi	$\vec{J}(A/m^2)$	$\varepsilon(F/m)$	şi	$\gamma(S/m)$
$Q(C)$	şi	$I(A)$	$C(F)$	şi	$1/R(S)$

5.10.2 Aplicaţii

1) Măsurarea rezistivităţii solului

În particular, aceasta problemă este de interes geologic. Variaţiile rezistivităţii, relevate prin măsurări de rezistenţă electrică între puncte echidistante la suprafaţa solului, pot să evidenţieze prezenţa în subsol a unor zone constituite din materiale diferite, dacă aceste zone au rezistivităţi diferite. În mod obişnuit, în două puncte situate pe suprafaţa Pământului la o distanţă d, se introduc în sol doi conductori de formă geometrică dată, aflaţi la o diferenţă de potenţial constantă şi se măsoară rezistenţa electrică R dintre aceste puncte, utilizând de exemplu o punte Whcatstone, (Fig. 5.43). Admiţând că cei doi conductori introduşi în sol sunt două sfere identice de rază a şi că distanţa dintre sfere este mult mai mare deât raza sferelor, $d >> a$ şi totodată că proprietăţile electrice ale mediului aflat între ele sunt caracterizate prin conductivitatea γ şi permitivitatea ε, se poate determina rezistenţa R a solului utilizând relaţia cunoscută (5.56)

$$R = \frac{\varepsilon}{C\gamma}$$

în care C reprezintă capacitatea sistemului constituit din cei doi conductori sferici. În general capacitatea electrică a unui sistem de două sfere conductoare, având razele a şi b, distanţa dintre centrele lor fiind d, este dată de relaţia

$$C = \frac{4\pi\varepsilon}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{2}{d}}$$

Particularizând această relaţie pentru $a = b$ şi $d >> a$, obţinem expresia capacităţii sistemului considerat în (Fig. 5.43):

$$C = 2\pi\varepsilon a \tag{5.120}$$

Substituind această expresie în relaţia (5.55), obţinem imediat expresia rezistenţei electrice care se măsoară între punctele considerate:

$$R = \frac{1}{2\pi\gamma a} \tag{5.121}$$

Această rezistenţă fiind proporţională cu rezistivitatea şi totodată *independentă de distanţa dintre cele două puncte atât timp cât* $d >> a$, devine o metodă comodă pentru detectarea neomogenităţilor din structura solului în funcţie de variaţia conductivităţii între punctele în care se efectuează măsurătorile.

2) Determinarea "tensiunii de pas"

Presupunem că, dintr-un motiv oarecare, unul dintre conductorii unei linii de înaltă tensiune s-a rupt şi că o porţiune rectilinie din acesta, având lungimea L, cade făând contact cu solul. Suprafeţele echipotenţiale în jurul conductorului rectiliniu, aflat la potenţial înalt, sunt suprafeţe cilindrice, coaxiale cu conductorul parcurs de curentul de intensitate I (Fig. 5.44. Distribuţia spaţială a curenţilor electrici în sol fiind normală la suprafeţele echipotenţiale, este posibil ca diferenţa de potenţial dintre paşii unui pieton, care se apropie de conductor pe o direcţie perpendiculară pe acesta, să fie suficient de mare pentru a-l electrocuta. Este deci interesant să evaluam această "*tensiune de pas*". Considerând că lungimea pasului este l şi distanţa de la pieton la conductor este r, diferenţa de potenţial dintre echipotenţielele pe care calcă pietonul la un moment dat, $U_p = V(r) - V(r + l)$, reprezintă aşa numita tensiune de pas. Se poate determina această tensiune, ţinând seama de faptul că, în orice punct din sol aflat în vecinătatea conductorului, este valabilă legea lui Ohm locală, $\vec{J} = \gamma\vec{E}$, în care γ reprezintă conductivitatea

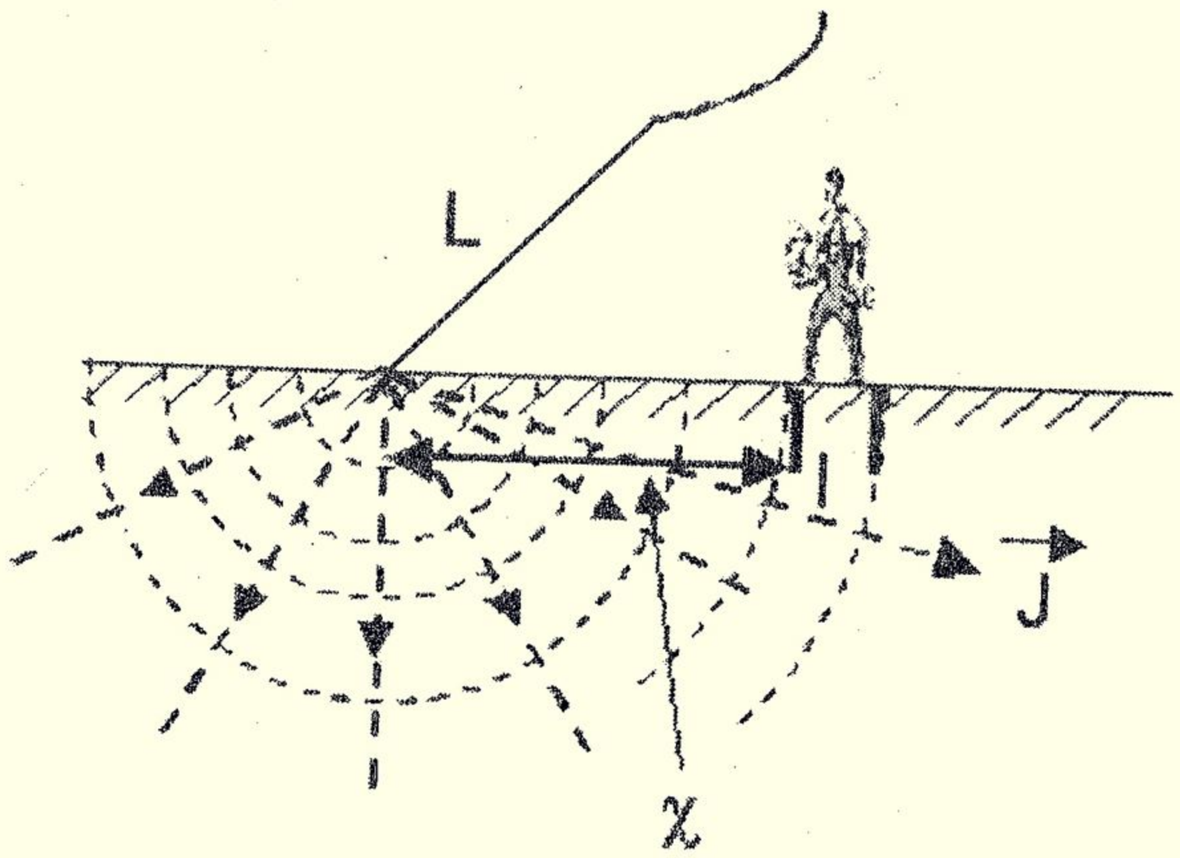


Figura 5.44: Tensiunea dintre paşii unui pieton aflat în apropierea unui conductor la înaltă tensiune

solului. Astfel,

$$U_p = \int_r^{r+l} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dr} = \frac{1}{\gamma} \int_r^{r+l} \vec{J} \cdot \overrightarrow{dr} \tag{5.122}$$

Pentru suprafaţa echipotenţială cilindrică de rază r şi lungime L aflată în sol avem

$$J = \frac{I}{\pi L r},$$

şi, în aceste condiţii exprcsia tensiunii dc pas(6.123) devine:

$$U_p = \frac{I}{\pi . \gamma L} \int_r^{r+l} \frac{dr}{r} = \frac{I}{\pi . \gamma L} \ln\left(1 + \frac{l}{r}\right). \tag{5.123}$$

Cu $I = 300$ A, $l = 60$ cm, $r = 1$ m, $L = 20$ m, $\gamma = 10^{-2}$ $(\Omega/\mathrm{m})^{-1}$, se găseşte că tensiunea dintre paşii pietonului, egală cu $U_p = 1300$ volţi, este suficientă pentru a-l electrocuta.

3) Localizarea defectelor pe liniile de comunicaţie şi pe liniile de transport a energiei electrice.

Presupunem că, pentru comunicaţiile telefonice sau pentru transportul energiei electrice între două staţii A şi B aflate la distanţa L, se utilizează un cablu subteran şi izolaţia unuia dintre conductorii din cablu este defectă, defectul fiind situat la o distanţă x necunoscută (Fig. 5.45). Acest defect

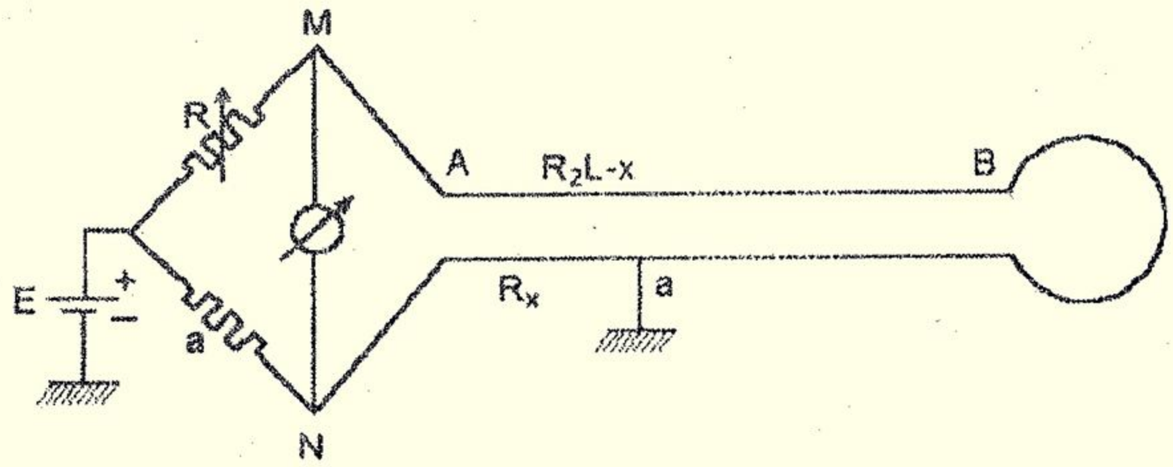


Figura 5.45: Schema pentru localizarea defectului de izolaţie la un cablu subteran pentru comunicaţii la distanţă

cauzează pierderi de energie în sol şi remedierea lui necesită cunoaşterea distanţei x. În acest scop se utilizează metoda punţii lui Wheatstone instalate în staţia A. În această punte, două ramuri alăturate, aflate între punctele M şi N, sunt constituite din rezistenţele cunoscute a şi R (reglabilă), iar celelalte două ramuri, conectate între aceleaşi puncte, sunt constituite din conductorul cu izolaţie defectă şi dintr-un al doilea conductor identic aflat în acelaşi cablu şi a cărui izolaţie faţă de sol este bună. Aceşti conductori se unesc la extremităţile lor de la staţia B. O bornă a sursei E de alimentare a punţii este pusă în contact cu solul, conexiunea ei între punctele P (comun rezistenţelor a şi R),şi Q, (aflat la distanţa x unde se află defectul căutat), este realizată prin intermediul solului. Acest punct Q delimitează rezistenţele

$$R_x = x/\gamma S \qquad \text{şi} \qquad R_{2L-x} = (2L - x)/\gamma S$$

în care $2L - x$ şi x reprezintă lungimile conductorilor conectaţi între punctele A, Q şi Q, N, iar S şi γ reprezintă secţiunea şi conductivitatea lor. Reglând rezistenţa R astfel înât curentul prin galvanometrul conectat în diagonala AB a punţii să se anuleze, puntea este echilibrată şi

$$RR_x = aR_{2L-x}$$

De aici rezultă imediat distanţa x căutată:

$$x = 2L\frac{a}{R+a} \tag{5.124}$$

4) Problema punerii la sol a instalaţiilor din motive de securitate

În anumite cazuri, pentru motive de siguranţă, se recurge la legarea instalaţiilor electrice la sol cu scopul de a dirija către masa conductoare a solului curenţii accidentali care pot provoca electrocutarea persoanelor care vin în contact cu instalaţia. Pentru aceasta se introduce în sol un electrod conductor, către care este dirijat un eventual curent de descărcare. Acest curent trece în sol cu atât mai uşor cu cât rezistenţa de trecere este mai mică. Această rezistenţă de trecere depinde evident de forma şi dimensiunile electrodului. Considerăm, de exemplu, că electrodul este sub formă de sferă de rază r_1 şi, la un moment dat, se află la potenţialul V_1. Pentru evaluarea rezistenţei de trecere presupunem că există o a doua sferă conductoare concentrică, având raza $r_2 > r_1$ şi potenţialul V_2. Fiind vorba de o distribuţie spaţială de curenţi, se poate determina rezistenţa R a mediului dintre cele două sfere, utilizând relaţia cunoscută $RC\gamma = \varepsilon$, în care C este capacitatea sistemului constituit din cele două sfere concentrice:

$$R = \frac{V_1 - V_2}{I} \qquad \text{şi} \qquad C = \frac{4\pi\varepsilon r_1 r_2}{r_2 - r_1}$$

Dacă r_2 tinde către infinit, V_2 tinde către zero şi astfel avem rezistenţa de trecere între sfera de rază r_1 şi infinit:

$$R = \frac{1}{4\pi\gamma r_1} \tag{5.125}$$

Cu $r_1 = 10$ cm, şi conductivitatea solului $\gamma = 10^{-2}$ S/m, rezistenţa de trecere este $R \approx 80$ ohmi. Dacă din acest electrod trece în sol un curent de 20 amperi, potenţialul său va fi $V_1 = RI = 1600$ volţi în raport cu potenţialul la infinit.

Capitolul 6

Curentul electric prin electroliţi

6.1 Generalităţi

Mişcarea dirijată a sarcinilor într-un conductor nu poatc fi observată direct. Curentul electric provoacă totuşi diferite fenomene care nu au loc ând sarcinile sunt în repaus. Experimentul descris în Fig. 6.1, care constă în a trimite un curent electric prin medii conductoare diferite, solid, lichid gaz, (un fir metalic conductor (a), în serie cu un tub conţinând un lichid (b) şi cu un tub cu gaz rarefiat (c), permite să observăm diferite efecte ele curentului electric. Un efect magnetic care constă în faptul că, indiferent de natura conductorului, un ac magnetic suspendat, adus in vecinătatea fiecăruia dintre aceşti conductori este supus unui cuplu de orientare datorat câmpului magnetic creat de curent. Un efect caloric care se dezvoltă în fiecare conductor dar a cărui intensitate depinde atât de natura conductorilor ât şi de dimesiunile lor. Un efect chimic care nu se observă la toţi conductorii. Curentul electric

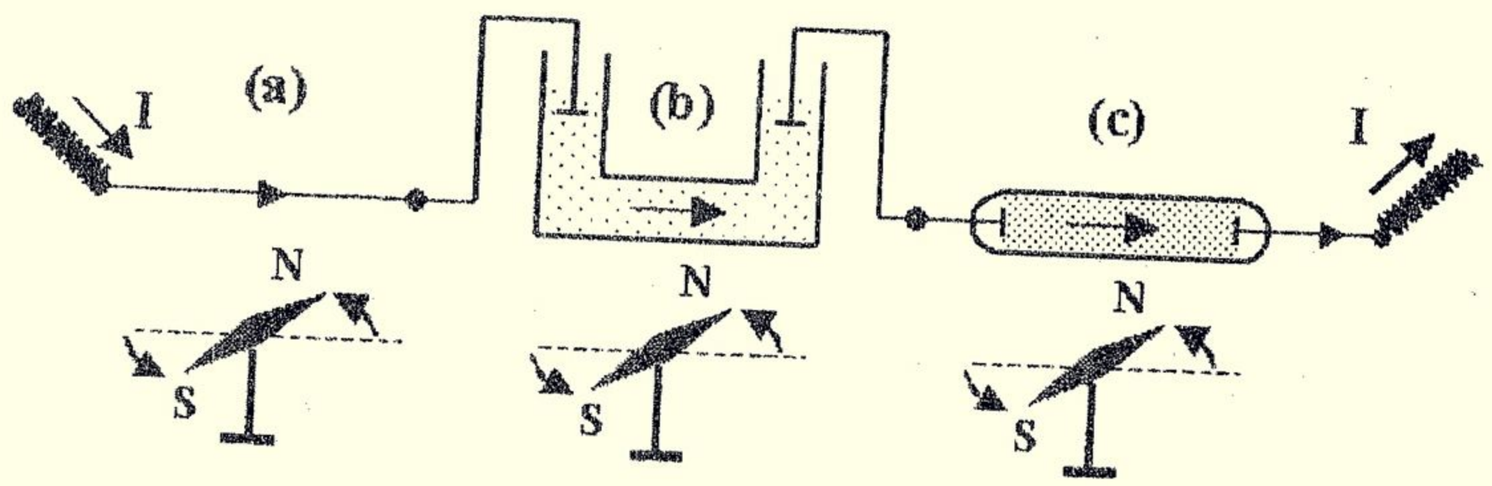


Figura 6.1: Efectele curentului electric evidenţiate în diferite medii conductoare

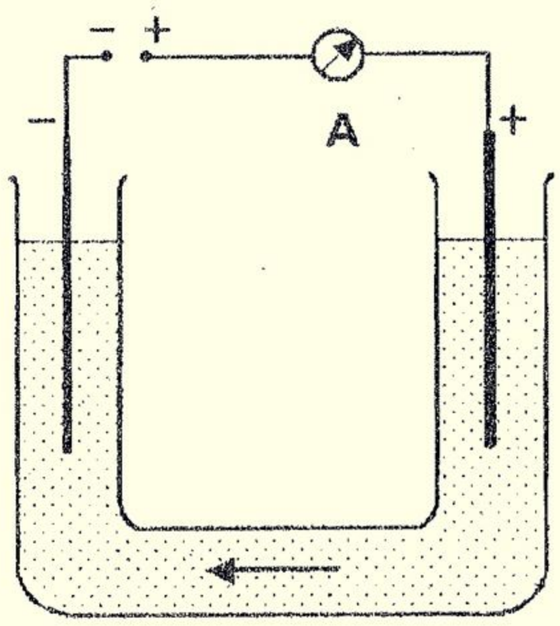


Figura 6.2: Experiment pentru studiul conductibilităţii soluţiilor apoase ale diferitelor substanţe

prin conductorul metalic nu produce nici un efect chimic, în timp ce, prin vasul care conţine soluţii apoase de acizi anorganici, săruri şi baze, trecerea curentului electric este însoţită de fenomene chimice constând în separarea particulelor componente ale substanţei dizolvate.

O clasificare a conductorilor sub aspectul acestor fenomene distinge două grupe mari: Conductori de ordinul întâi, în care curentul nu produce efecte chimice; din această clasă de conductori fac parte în general toate metalele. Conductorii de ordinul al doilea în care curentul electric este însoţit de fenomene chimice. Aceşti conductori se mai numesc electroliţi. Purtătorii sarcinilor mobile sunt atomi ionizaţi şi grupe de atomi numiţi ioni. Fenomenul de separare a substanţelor din electrolit sub acţiunea curentului electric se numeşte electroliză. Efectul chimic al curentului electric este observat în experimente utilizând cuve electrolitice (un vas cu electrolit în care se introduce doi electrozi conductori)

6.2 Disociaţia electrolitică şi disociaţia moleculelor în soluţie.

Fig. 6.2 dă schema unui experiment pentru studiul conductibilităţii soluţiilor apoase ale diferitelor substanţe. Într-un tub în formă de U cu diametrul de10 mm introducem doi electrozi metalici. Se umple tubul cu apă distilată şi se aplică electrozilor o diferenţă de potenţial de 100 volţi. Un microampermetru va indica un curent de ordinul 0,1 μ A. Dacă însă dizolvăm în apă

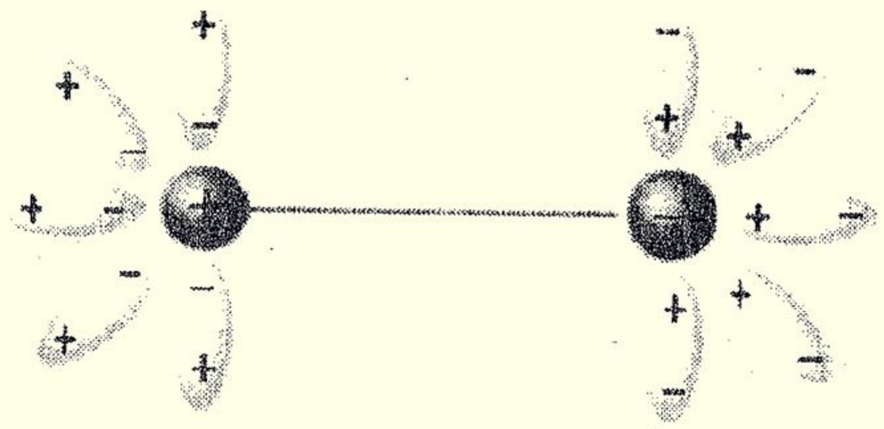


Figura 6.3:

o cantitate mică de sare de bucătărie $NaCl$, curentul creşte de multe ori, fapt care poate fi explicat prin apariţia unor sarcini electrice libere în soluţia de $NaCl$, capabile să se deplaseze sub acţiunea câmpului electric. În aceste condiţii se constată apariţia clorului, Cl la *anod* (electrodul pozitiv) şi a hidroxidului de sodiu $NaOH$ la *catod* (electrodul negativ), fapt datorat separării la electrozi a atomilor de clor şi de sodiu.

In concluzie, în soluţiile apoase de clorură de sodiu, purtătorii de sarcină pozitivă sunt ionii de sodiu Na^+ (*cationi*) şi purtătorii de sarcină negativă sunt ionii de clor Cl^- (*anioni*).

Separarea moleculelor în ioni se numeşte *disociaţie electrolitică* şi ea se produce prin dizolvarea substanţei, *fără intervenţia câmpului electric.* În teoria disociaţiei electrolitice se admite că, moleculele polare în care centrele sarcinilor negative şi pozitive sunt suficient de depărtate, au o structură de tip ionic. Într-o interpretare foarte schematică, formarea legăturii ionice este atribuită trecerii electronilor de valenţă de la un atom al moleculei la altul. În condiţiile structurii dipolare orbitele electronilor de valenţă vor fi legate, nu de unul dintre nuclee ci, de nucleul sistemului. În moleculele sau în compuşii cristalini cu legături ionice nu există atomi neutri ci ionii elementelor. De exemplu clorura de sodiu conţine ioni de Na^+ şi de Cl^- nu numai în soluţiile apoase ci şi în orice stare. Din aceşti ioni este constituită clorura de sodiu nu numai în stare cristalină ci şi in stare de vapori. În acest mod, în electrolit are loc numai disocierea ionilor şi nu formarea lor. Procesul de disociere a ionilor din molecule poate fi interpretat în modul următor: În electrolit, în jurul ficcăruia dintre ionii moleculei, de exemplu de $NaCl$, se orientează moleculele polare ale solventului (Fig. 6.3). Ionul pozitiv al

moleculei de substanţă dizolvată atrage polul negativ al ionilor solventului respingând totodată celălalt ion al moleculei de substanţă. Procesul de "alipire" a ionilor cu moleculele de solvent se numeşte *solvataţie* sau, în cazul

apei, *hidratataţie*. Ca urmare a agitaţiei termice o parte dintre moleculele de solvent ies din sfera de atracţie a unui ion dat, altele le iau locul astfel că solvataţia slăbeşte legătura dintre ioni. Într-o primă aproximaţie se poate presupune că forţa de interacţiune dintre ioni se micşorează, conform legii lui Coulomb, de ε ori, (ε fiind permitivitatea mediului). Ca efect al solvataţici legătura dintre ioni devine suficient de slabă pentru ca energia de agitaţie termică să-i poată disocia. După disocierea moleculei ionii acesteia rămân închişi în invelişul moleculelor de solvent şi ca urmare mişcarea lor încetineşte datorită faptului că masa şi volumul lor au crescut.

Disocierea moleculelor de substanţă în soluţie în ioni se observă nu numai la moleculele ionice ci şi la multe altele care se află în stare polară. De exemplu molecula de acid clorhidric (HCl). Stadiul premergător disociaţiei este ca şi mai înainte trecerea structurii polare în structură ionică sub acţiunea moleculelor polare de solvent: Moleculele de solvent atrase la extremităţile moleculelor polare condiţionează îndepărtarea polilor dipolului astfel încât în final, molecula capătă o structură ionică.

Concomitent cu procesul de disociere are loc şi un proces de atracţie a ionilor pozitivi şi negativi (*proces de recombinare)* care conduce la formarea moleculelor neutre. Se stabileşte un echilibru dinamic în care numărul de ioni formaţi prin disociere este egal cu numărul ionilor cere se recombină în acelaşi timp. De exemplu, echilibrul dinamic într-o soluţie de acid sulfuric poate fi exprimat ca

$$H_2SO_4 \qquad H^+ + HSO_4 \rightleftarrows 2H^+ + SO_4^-$$

În acest fel , în electrolit avem trei tipuri de ioni care se formează ca rezultat al disocierii treptate. Acest gen de disociere se observă la mulţi acizi. Dăm âteva exemple de disociere într-o singură treaptă a acizilor, bazelor şi sărurilor care formează electroliţi binari (electroliţi cu două tipuri de ioni):

Sunstanţa		Disocierea
Acizi	Acid clorhidric	$HCl \rightleftarrows H^+ + Cl^-$
	Acid azotic	$HNO_3 \rightleftarrows H^+ + NO_3^-$
Baze	Hidroxid de sodiu	$NaOH \rightleftarrows Na^+ + OH^-$
	Hidroxid de amoniu	$NH_4OH \rightleftarrows NH_4^+ + OH^-$
Săruri	Clorură de sodiu	$NaCl \rightleftarrows Na^+ + Cl^-$
	Clorură de amoniu	$NH_4Cl \rightleftarrows NH_4^+ + Cl^-$

Capacitatea de disociaţie a diferitelor lichide este sensibil diferită. Pentru caracterizarea cantitativă a gradului de disociaţie se introduce coeficientul de disociaţie α care reprezintă raportul dintre numărul de molecule de substanţă disociate şi numărul total de molecule. Acest coeficient, care indică efectiv ce procent din numărul total de molecule de substanţă dizolvată s-a disociat în ioni, depinde de natura solventului şi a substanţei dizolvate şi totodată de concentraţia şi de temperatura soluţiei.

Conform celor spuse mai sus, cu ât este mai mare permitivitatea ε a solventului, cu atât mai puternic va slăbi legătura dintre ionii moleculelor de substanţă şi, în consecinţă, cu atât mai mare va fi coeficientul de disociaţie α. Se poate înţelege astfel că diferite substanţe disociază foarte uşor în apă deoarece apa are o permitivitate relativă mare ($\varepsilon_r \approx 81$).

Trebuie să notăm că nu numai moleculele de substanţă sunt capabile de disociere ci şi moleculele de solvent. De exemplu moleculele de apă chimic pură disociază în ioni: $H_2O \rightleftarrows H^+ + OH^-$. Totuşi concentraţia ionilor este foarte slabă: La temperatura camerei, într-o tonă de apă disociază numai 1,4 mg. Menţionăm deasemenea că cristalele ionice, topindu-se, formează lichide puternic ionizate.

6.3 Legea lui Ostwald.

Presupunem că 1 cm^3 de soluţie conţine n_o molecule de substanţă dizolvată şi fie α coeficientul de disociaţie. Astfel, 1cm^3 de soluţie conţine αn_0 ioni pozitivi şi tot atâţia ioni negativi. Presupunem totodată că molecula disociază numai în doi ioni, deci ne limităm la cazul electroliţilor binari. În aceste condiţii, numărul de molecule nedisociate aflate în 1 cm^3 este dat de diferenţa $n_0 - \alpha n_0 = n_0 (1 - \alpha)$. Numărul de molecule care disociază în timp de o secundă este proporţional cu numărul de molecule capabile să disocieze (respectiv cu numărul de molecule nedisociate), notând cu A coeficientul de proporţionalitate (*coeficient de ionizaţie*), numărul de molecule care disociază în fiecare secundă este $A (1 - \alpha) n_0$.

Numărul de ioni care se recombină în timp de 1 sec este proporţional atât cu numărul de ioni pozitivi ât şi cu numărul de ioni negativi. Notând cu B factorul de proporţionalitate (*coeficientul de recombinaţie*), numărul de molecule formate prin recombinarea ionilor va fi $B (\alpha n_0)^2$. În acest caz, condiţia de echilibru se scrie:

$$A\,(1-\alpha)\,n_0 = B\,(\alpha n_0)^2$$

De aici legea lui Ostwald:

$$\frac{\alpha^2}{1-\alpha} = \frac{A}{B}\frac{1}{n_0} \tag{6.1}$$

Raportul A/B se numeşte *constanta de disociaţie* sau constanta de echilibru şi, pentru o temperatură dată, această mărime este o constantă şi ea caracterizează electrolitul. Din legea lui Ostwald (7.1) rezultă că mărimea $\alpha^2/(1-\alpha)$ este invers proporţională cu concentraţia soluţiei n_0. De aceea, pentru soluţii foarte diluate ($n_0 \to 0$), coeficientul α tinde către unitate ($\alpha \to 1$). În acest caz, practic toate moleculele sunt disociate. În soluţiile concentrate $n_0 \to \infty$ şi α tinde către zero ($\alpha \to 0$); în aceste soluţii di- sociaţia trebuie să fie absentă. Electroliţii se împart în *electroliţi slabi* în care α este mic şi creşte sensibil cu creşterea concentraţiei, şi *electroliţi tari* în care $\alpha \approx 1$ chiar pentru concentraţii mari ale soluţiei. Legea lui Ostwald se verifică bine pentru electroliţii slabi. Aceştia sunt în mare parte acizi, ca de exemplu acidul carbonic (H_2CO_3), şi o serie de baze organice. Pentru electroliţii tari legea lui Ostwald nu se aplică. Din această categorie fac parte substanţele anorganice cu molecule polare (săruri acizi şi baze), de exemplu HCl, HNO_3, $NaOH$, ş.a.

6.4 Conducţia ionică. Mobilitatea ionilor.Legea lui Ohm pentru electroliţi

Acest tip de conducţie este posibil în solide în cazul cristalelor ionice, în lichide, în cazul electroliţilor, şi în cazul plasmelor gazoase. Când aceste materiale sunt plasate între doi conductori conectaţi la bornele (+) şi (−) ale unui generator, ionii pozitivi se deplasează în sensul câmpului electric, respectiv în sensul curentului, către electrodul negativ (catod) iar ionii negativi se deplasează în sensul invers, către electrodul pozitiv (anod). Curentul electric este datorat unei duble deplasări de ioni: ioni pozitivi având sarcina Q_+, şi densitatea volumică $\rho_+ = n_+Q_+$, şi ioni negativi Q_- cu densitatea volumică $\rho_- = n_-Q_-$. S-a notat cu n_+ şi n_- numărul de ioni pozitivi, respectiv negativi, pe unitatea de volum. Dacă $\vec{v}_+$ şi $\vec{v}_-$ sunt vitezele medii ale ionilor

pozitivi şi negativi, densitatea volumică de curent $\vec{J}$ datorat conducţiei ionice se exprimă ca o rezultantă a curenţilor volumici de ioni pozitivi şi negativi:

$$\vec{J} = \rho_+ \vec{v}_+ + \rho_- \vec{v}_- = n_+ Q_+ \vec{v}_+ + n_- Q_- \vec{v}_- \tag{6.2}$$

Această expresie a curentului volumic total, poate fi scrisă şi ca o funcţie de mobilitatea ionilor. În acord cu (5.29), vitezele medii ale sarcinilor sunt proporţionale cu câmpul electric $\vec{E}$, respectiv

$$\vec{v}_+ = \mu_+ \vec{E} \quad şi \quad \vec{v}_- = -\mu_- \vec{E}, \tag{6.3}$$

în care μ_+ şi μ_- reprezintă mobilităţile celor două tipuri de ioni. Expresia (6.2) capătă forma următoare:

$$\vec{J} = \left(n_+ Q_+ \mu_+ + n_- Q_- \mu_-\right) \vec{E} \tag{6.4}$$

De aici, expresia generală a conductivităţii în funcţie de mobilităţile sarcinilor:

$$\gamma = n_+ Q_+ \mu_+ + n_- Q_- \mu_- \tag{6.5}$$

În cazul elcctroliţilor binari, avem:

$$n_+ = n_- = \alpha n_0 \quad şi \quad Q_+ = Q_-$$

şi expresia conductivităţii (6.5) devine:

$$\gamma = n_0 Q \alpha \left(\mu_+ - \mu_-\right) \tag{6.6}$$

În final legea lui Ohm locală pentru electroliţi se scrie:

$$\vec{J} = n_0 Q \alpha \left(\mu_+ + \mu_-\right) \vec{E} \tag{6.7}$$

În principiu este de aşteptat ca mobilitatea ionilor să se micşoreze cu concentraţia, dar se constată că această dependenţă este în general slabă. Tabelul care urmează dă mobilităţile câtorva ioni, determinate experimental pentru soluţii cu concentraţie slabă, la temperatura camerei.

Ioni pozitivi	Mobilitatea $\mu(cm/\sec\cdot volt)$	Ioni negativi	Mobilitatea $\mu(cm/\sec\cdot volt)$
H^+	$0,003263$	OH^-	$0,001802$
K^+	$0,000369$	Cl^-	$0,000677$
Na^+	$0,000450$	NO_3^-	0.000639
Li^+	$0,000346$	Br^-	$0,000694$

Din acest tabel se poate deduce că vitezele ionilor sunt neînsemnate. De exemplu, în câmpul $E = 1$ V/m, chiar şi cel mai rapid ion, cel de hidrogen, are viteza de aproximativ 12 cm/oră.

Cunosând mobilitatea şi sarcina ionului se poate determina coeficientul de frecare a ionilor în cursul deplasării lor, particularizând ecuaţia de echilibru a forţelor electrostatice şi de frecare (6.20), $Q_+\vec{E} = a_+v_+$, respectiv $Q_-\vec{E} = a_-v_-$ în care a_+ şi a_- sunt coeficienţii de frecare corespunzători ionilor pozitivi şi negativi. Aceste ecuaţii permit să scriem expresiile acestor coeficienţi:

$$a_+ = \frac{Q_+}{\mu_+} \quad \text{şi} \quad a_- = \frac{Q_-}{\mu_-} \tag{6.8}$$

Mai departe, asemănând ionul cu o sferă, pot fi formulate,în baza legii lui Stokes ($F = 6\pi\eta rv$),expresiile:

$$a_+ = 6\pi\eta r_+ \quad \text{şi} \quad a_- = 6\pi\eta r_- \tag{6.9}$$

în careη este coeficientul de vâscozitate al mediului, iarr_+ şi r_- sunt razele efective ale ionilor. În acest mod, cu valorile a_+, a_- şi η cunoscute, se determină imediat razele r_+ şi r_-. Aceste raze caracterizează dimensiunile ionilor împreună cu învelişul lor constituit din dipoli de solvatant.

Experienţa arată că, odată cu creşterea temperaturii electrolitului, creşte şi conductivitatea γ. Prin încălzire creşte disociaţia moleculelor şi se măreşte mobilitatea ionilor fapt care conduce la o micşorare a rezistivităţii ($\rho = 1/\gamma$). Fig. 6.4 dă schematic dependenţa conductivităţii electrolitului de concentraţie. Alura acestei curbe poate fi interpretată

presupunând că mobilitatea ionului este independetă de concentraţia electrolitului. Cu micşorarea concentraţiei disociaţia moleculelor creşte. Din acest motiv, prin micşorarea concentraţiei, produsul $n\alpha$ mai întâi creşte, (predominând creşterea lui α), iar apoi se micşorează, (predominând micşorarea concentraţiei moleculelor neutre de substanţă dizolvată); ând toate moleculele au disociat avem $\alpha = 1$.

Figura 6.4: Dependenţa conductivităţii electrolitului de concentraţie

Legea lui Ohm locală nu se mai verifică exactând câmpul electric în electrolit depăşeşte 10 kV/cm. Aceasta se datorează faptului că, vitezele mari pe care le capătă ionii antrenează o modificare a condiţiilor interacţiunii dintre ioni şi moleculele solventului. În consecinţă mobilitatea ionilor depinde de viteza lor de deplasare şi ca urmare dependenţa lui $\vec{J}$ de $\vec{E}$ devine neliniară.

6.5 Electroliza. Reacţii chimice secundare la electrozi.

Trimiţând un curent electric printr-o cuvă electrolitică , fluxul de electroni prin suprafaţa electrozilor se închide prin electrolit cu fluxul ionilor. Prin aceasta, la anod se va produce transformarea anionilor în atomi neutri (sau grupări de atomi) cu cedare de electroni către electrod. La catod are loc transformarea cationilor în atomi neutri (sau grupări de atomi), acştia luând electroni de la anod. Pierzându-şi sarcina ionii se transformă, fie în atomi neutri, fie în grupări de atomi (radicali) care nu pot exista fără sarcină excedentară şi de aceea aceştia intră în reacţie chimică cu solventul sau cu materialul din care este constituit electrodul. În ambele cazuri la suprafaţa electrozilor are loc o separare de noi materiale care nu existau în soluţie. Efectiv în aceasta constă fenomenul de electroliză. Reacţiile chimice provocate de neutralizarea ionilor se numesc *reacţii chimice secundare.*

Electroliza soluţiei apoase de HCl este un exemplu simplu de separare a subtanţei disociate fără reacţii chimice secundare. Moleculele de HCl disociază în ioni de H^+ şi de Cl^-. Prin neutralizare la electrozi aceşti ioni se transformă în atomi de H şi de Cl. De la catod se degajă bule de hidrogen şi de la anod bule de clor.

Prin electroliza soluţiei de acid sulfuric (H_2SO_4) în apă, la catod se degajă hidrogenul. Dacă radicalul SO_4 nu reacţionează cu materialul anodului, el intră în reacţie cu apa:

$$2SO_4 + 2H_2O = 2H_2SO_4 + O_2$$

În consecinţă rezultatul acestei electrolize va fi descompunerea apei în hidrogen şi oxigen.

Prin electroliza soluţiei de hidroxid de potasiu (sodă caustică) KOH în apă, au loc reacţii secundare la ambii electrozi. Dacă materialul electrozilor nu suferă modificări, aceste reacţii sunt: la catod, $2K + 2H_2O = 2KOH + H_2$ şi la anod

$4OH + 2H_2O = 4H_2O + O_2$. În acest caz rezultatul electrolizei constă de asemenea în descompunere apei.

6.6 Legile lui Faraday

Fenomenul de electroliză a fost studiat cantitativ de M.Faraday (1834). Acesta evidenţiază următoarele două legi fundamentale: *1). Cantitatea de substanţă m, care se depune la catod, este proporţională cu sarcina electrică Q trecută prin electrolit.*

$$m = KQ = KI.t \tag{6.10}$$

Constanta K numită *echivalentul electrochimic,* depinde de natura chimică a substanţei şi este *numeric egală cu masa substanţei depuse la catodând electrolitul este străbătut de un curent electric de un amper în timp de o secundă.* Această constantă este adesea exprimată în grame sau în miligrame pe coulomb. Tabelul următor, dă valorile echivalentului electrochimic pentru câteva substanţe.

2). Echivalentul electrochimic al diferitelor substanţe este proporţional cu echivalentul chimic. Echivalentul chimic (care se mai numeşte echivalentgram) este egal cu raportul $\frac{M}{n}$ exprimat în grame, în care M este masa atomică sau masa moleculară a ionilor neutralizaţi la electrozi iar n este valenţa ionului (n reprezintă numărul de atomi de hidrogen care poate substitui ionul dat sau care se asociază în compusul chimic).

Legea a doua a lui Faraday exprimă această proporţionalitate:

$$K = a\frac{M}{n} \tag{6.11}$$

Substanţa	Masa atomică M	Valenţa	Echivalentul electrochimic $mg/coulomb$
Argint	107,9	1	1,1180
Cupru	63,57	2	0,3294
Hidrogen	1,008	1	0,01045
Oxigen	16,00	2	0,01045
Clor	35,46	1	0,3674

Unifiând ambele legi alc lui Faraday, (6.10) şi (6.11), obţinem expresia următoare:

$$m = a\frac{M}{n}Q \tag{6.12}$$

sau

$$m = a\frac{M}{n}I.t$$

Factorul de proporţionalitate a poate fi determinat numeric dacă se aleg valorile lui I şi t, respectiv avaloarcea lui Q, astfel înât să se depună la catod o cantitate de substanţă egală numeric cu echivalentul gram. Astfel, cu $m = \frac{M}{n}$ grame, formula (6.12) dă următoarea expresie pentru constanta a:

$$a = \frac{1}{Q} = \frac{1}{I.t} \tag{6.13}$$

Experimentul acesta, repetat pentru diferite substanţe depuse la catod, conduce la concluzia că, indiferent de natura substanţei, pentru depunerea unui echivalent gram de substanţă la catod este necesar să fie trecută prin soluţie aceeaşi cantitate de electricitate, $F \approx 96500$ coulombi. În consecinţă, constanta de proporţionalitate a se dovedeşte a fi o *constantă universală*:

$$a = \frac{1}{F} = \frac{1}{96500} \qquad (C^{-1}) \tag{6.14}$$

Mărimea $F \approx 96500$ coulombi se numeşte *numărul lui Faraday*.
In concluzie fenomenul de electroliză se supune următoarei legi generale

$$m = \frac{1}{96500}\frac{M}{n}I.t \tag{6.15}$$

6.7 Interpretarea legilor lui Faraday. Determinarea sarcinii electronului.

Mecanismul conductibilităţii electroliţilor descris mai sus, permite să deducem direct legile lui Faraday: Într-adevăr, masa unui ion fiind m_0, prin neutralizarea a z ioni se eliberează la electrod o cantitate de substanţă egală cu

$$m = m_0 z \tag{6.16}$$

Sarcina fiecărui ion este $q = ne$, în care e este sarcina elementară egală cu sarcina electronului. Pentru neutralizarea a z ioni trebuie să treacă prin electrolit o cantitate de electricitate egală cu

$$Q = nez \tag{6.17}$$

Se deduce imediat că

$$m = \frac{m_0}{ne} Q \tag{6.18}$$

Această formulă exprimă prima lege a lui Faraday. Comparând-o cu expresia (7.10), rezultă imediat că echivalentul electrochimic K este egal cu raportul dintre masa ionului şi sarcina lui:

$$K = \frac{m_0}{ne} \tag{6.19}$$

Masa atomică (moleculară) de substanţă separată prin electroliză este egală cu

$$M = N_A m_0 \tag{6.20}$$

În care $N_A = 6,023.10^{23}$ este numărul lui Avogadro. În mod corespunzător echivalentul chimic este egal cu

$$\frac{M}{n} = \frac{N_A m_0}{n} \tag{6.21}$$

Comprând ecuaţiile (6.21) şi (6.19) găsim

$$K = \frac{1}{N_A e} \frac{M}{n} \tag{6.22}$$

Această formulă exprimă efectiv a doua lege a lui Faraday (6.11) cu

$$a = \frac{1}{F} = \frac{1}{N_A e} \tag{6.23}$$

Din aceasta rezultă că sarcina elementară a electronului este egală cu:

$$e = \frac{F}{N_A} = \frac{96500}{6,023.10^{23}} = 1,6.10^{-19} C \tag{6.24}$$

Admiţând că această valoare a sarcinii electronului poate fi determinată printr-o altă metodă, raţionamentul de mai sus poate sugera posibilitatea de a determina numărul lui Avogadro, bineînţeles în limitele erorilor experimentale permise de metoda bazată pe fenomenul de electroliză.

6.8 Conductibilitatea electrolitică a corpurilor solide.

Acest tip de conductibilitate epoate fi întâlnit frecvent la o serie de substanţe în stare solidă cu structură cristalină ionică. Sarea gemă este adesea luată ca exemplu în acest sens. În reţeaua cristalină a acestui material ionii de Na şi de Cl sunt situaţi în nodurile reţelei. La temperaturi joase sarea gemă se comportă ca un bun izolator, dar la temperaturi ridicate, depăşind 400°C ea, rămânând încă în stare solidă (până la temperatura de topire 780 °C), devine sensibil conductoare. Experimentele confirmă faptul că trecerea curentului prin soluţia de sare de bucătărie se supune legilor electrolizei. Se observă mai întâi că la temperatura de 400 °C curentul se datorează practic în întregime ionilor de Na. La temperaturi mai ridicate devine evi- dentă şi mobilitatea ionilor de Cl. În mod obişnuit conducţia electrolitică provoacă o alterare a reţelei cristaline. Prin electroliza sării geme încălzite, se separă la catod Na sub formă de filamente violete vizibile cu ochiul liber (aşa numitele dendrite) care pătrund în profunzimea cristalului. Acest tip de conductibilitate ionică este prezent în cristalele multor alţi compuşi, printre care KCl, $BaCl_2$, BaI_2, $AgNO_3$, etc.

Mecanismul complicat al conductibilităţii ionice poate fi prezentat pe scurt în modul următor: La temperaturi înalte, amplitudinea oscilaţiei ionilor în jurul poziţiilor de echilibru devine atât de mare înât, prin efectul fluctuaţiilor termice, o parte dintre ioni îşi pot schimba locurile cu ioni ve-

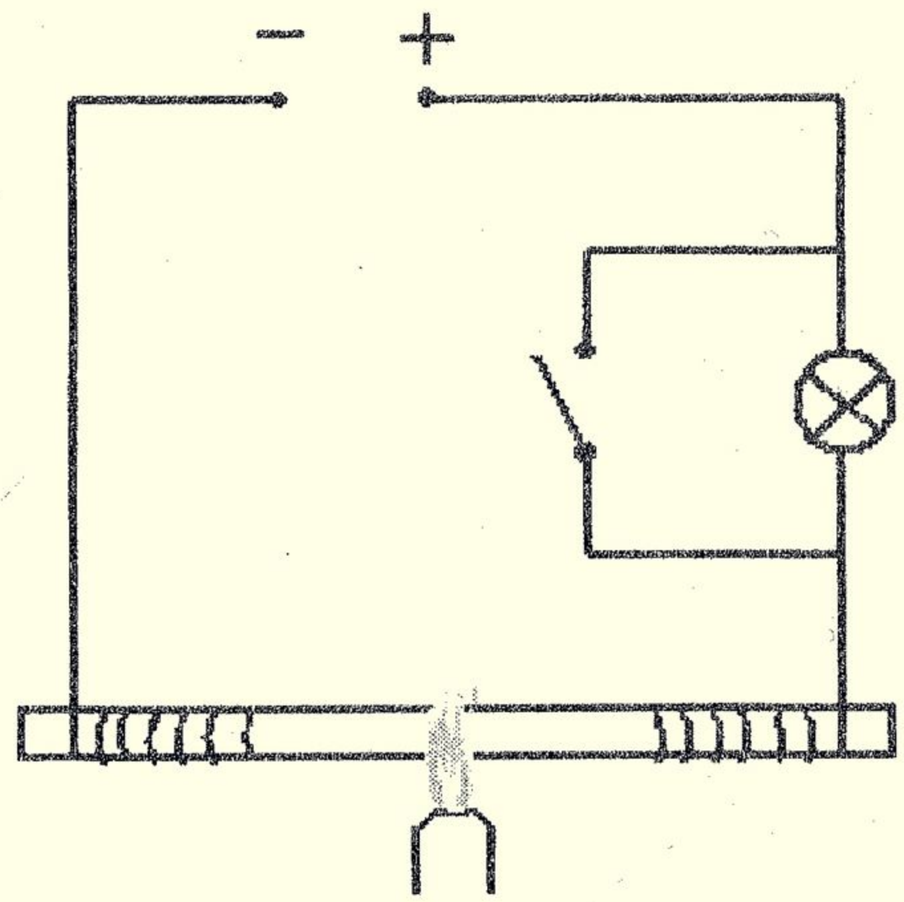


Figura 6.5: Experiment pentru demonstrarea conductibilitaţii electrolitice

cini. În aceste condiţii câmpul electric exterior provoacă o mişcare dirijată a ionilor. Totuşi acest mecanism nu este încă suficient de clar în toate detaliile.

Proprietăţi de conductibilitate electrolitică au fost relevate şi în cazul sticlei, cu toate că sticla nu are o structură cristalină ci mai curând ea poate fi comparată cu un lichid (răcit) care posedă o vâscozitate mare. La temperaturi obişuite sticla este un izolator, dar la temperturi înalte ea se prezintă ca un electrolit în care ionii deNa^+ capătă o mobilitate remarcabilă. Experimentul următor pune în evidenţă conductibilitatea sticlei în aceste circumstanţe. O baghetă de sticlă, de grosimea unui creion este introdusă în circuitul unei surse în serie cu un bec de iluminat electric Fig. 6.5. La temperatura ambiantă rezistenţa baghetei este mare

şi becul nu se aprinde. Dacă bagheta este supusă încălzirii la flacără, la temperaturi de 300-400 °C, rezistenţa ei se micşorează şi filamentul becului devine tot mai incandescent. După aceea se scurt-circuitează becul cu ajutorul unui întrerupător şi se înlătură flacăra. Se constată că încălzirea sticlei continuă, ea fiind provocată de curentul electric. După un timp, sticla devine incandescentă şi încep să cadă picături din ea.

6.9 Aplicaţiile electrolizei.

Menţionăm câteva aplicaţii tehnice mai importante ale electrolizei :

a) În metalurgie se obţin numeroase metale prin electroliză. De exemplu sodiul se obţine prin electroliza soluţiilor de sare gemă sau de sare de bucătărie. Din soluţiile de $MgCl_2$ şi $CaCl_2$ se separă Mg şi Ca.

Aluminiul se obţine exclusiv prin *electroliza oxizilor de aluminiu.* Materia primă pentru producerea aluminiului este bauxita din care, extrăgându-se apa, se obţine oxidul de aluminiu, Al_2O_3 . Acesta, împreună cu Na_3AlF_6 (criolit), care se adaugă pentru micşorarea temperaturii sistemului, se supune electrolizei, electrozii fiind constituiţi din plăci de grafit. Curentul prin acest electrolit în stare topită la 900°C este de ordinul zecilor de mii de amperi şi, din acest motiv, fabricile de aluminiu sunt de regulă situate în apropierea surselor de energie electrică de mare putere.

b) În industrie se efectuează prin electroliză *purificarea sau rafinarea metalelor.* Pentru aceasta, metalul de rafinat devine anod în baia electrolitică iar electrolitul este o sare a metalului dat. Această metodă este utilizată în mod obişnuit pentru rafinarea cuprului. Cuprul extras din minereu conţine compuşi sulfuroşi care îi micşorează conductivitatea. Din acest cupru se realizează anozi masivi. Electrolitul este o soluţie apoasă de sulfat de cupru 15% şi de sulfit de sodiu 10%. Cuprul supus electrolizei trece în soluţie sub formă de ioni de Cu^{++} iar la catod, după neutralizarea ionilor se depune cuprul purificat. Astfel. puritatea cuprului din care se realizează conductorii este de până la 99,9%. În acest proces de rafinare densitatea de curent prin electrolit este slabă, fapt care oferă posibilitatea de a se utiliza bacuri electrolitice mari în care sunt conectaţi în paralel mai mulţi electrozi. Impurităţile care se depun pe fundul vasului electrolitic sunt supuse unor operaţii de purificare suplimentare pentru a separa o serie de metale preţioase, aur, platina, argint etc.

c) *Descompunerea electrolitică a apei* în hidrogen şi oxigen este utilizată astăzi pe scara largă pentru obţinerea acestor gaze utilizate în diferite tehnologii.

Prin descompunerea unor mari cantităţi de apă se *separă apa grea* D_2O, care are o imprtanţă deosebită în centralele atomice (s-a notat cu simbolul D deuteriul. Acesta este un atom greu de hidrogen cu greutatea atomică 2). Datorită mobilităţii mai reduse a ionului D^+ în comparaţie cu cea a ionului de H^+, gazele care se degajă prin electroliză au o concentraţie micşorată de D_2, în timp ce, în soluţie această mobilitate redusă măreşte concentraţia de apă grea.

d) Este posibilă *obţinerea imaginii obiectelor* prin electroliză (*galvanoplastia*). Se confecţionează o imagine negativă a obiectului, din ipsos Aceasta,

acoperită cu o pulbere conductoare de grafit, joacă rolul de catod în baia electrolitică pe care se depune metalul prin electroliză. Prin această metodă se realizează clişeele tipografice şi diferite alte obiecte metalice având forme complicate.

e) *Depunerea metalelor prin electroliză* este larg aplicată pentru acoperirea unor metale cu un strat din alte metale (*galvanostegia*). Obiectele neconductoare pot fi metalizate dacă suprafaţa lor este în prealabil acope- rită cu un lac şi apoi cu o pulbere de grafit.

f) *Polizarea electrolitică a suprafeţelor metalice.* Obiectul metalic de polizat,juând rolul de anod în baia electrolitică, este supus dizolvării prin electroliză. În prezenţa asperităţilor de pe suprafaţă, dizolvarea electrolitică se produce mai rapid în zonele de pe suprafaţă care prezintă asperităţi cu curburi mari sau ascuţite deoarece în aceste zone intensitatea câmpului electric şi, implicit, densitatea de curent este mai mare. Acest proces, duce într-o prima etapă la dizolvarea asperităţilor de pe suprafaţă, constituind efectiv un proces de polizare electrolitică a suprafeţei metalului.

g) *Condensatorii electrolitici.* Aceştia sunt realizaţi din doi electrozi din aluminiu, aflaţi într-un electrolit compus dintr-un amestec de acid boric (H_3BO_3) şi o soluţie de clorura de amoniu (NH_4OH) cu adaus de glicerină. Făcând să treacă un curent prin electrolit, anodul se acoperă progrsiv cu un strat izolator de oxid de aluminiu şi curentul se micşorează treptat până la zero. Stratul de oxid suportă diferenţe de potenţial de până la 40 volţi. În acest fel se formează un condensator având una dintre armături polarizată pozitiv (*electrodul pozitiv*) şi cealaltă armătură, constituită din electrolit împreună cu electrodul negativ, acestea fiind separate de stratul izolator de oxid de aluminiu. Datorită grosimii foarte mici a stratului izolator, capacitatea condensatorului este în general foarte mare. În tehnica realizării acestor condensatori, elecrtrozii pozitivi sunt în prealabil prelucraţi pentru a fi acoperiţi cu stratul de oxid, iar intre armăturile metalice din aluminiu se interpun foiţe subţiri de hârtie impregnată cu electrolit. Se obţin astfel condensatori de dimensiuni foarte mici având capacităţi de ordinul sutelor şi miilor de microfarazi la tensiuni de sute de volţi. Se înţelege astfel că un condensator electrolitic are o polaritate determinată; utillizarea lui cu polaritatea inversată provoacă distrugerea stratului izolator fapt care duce la o creştere considerabilă a curentului şi la deteriorarea condensatorului. În general factorul de calitate al acestor codensatori este relativ mic.

6.10 Potenţiale electrochimice.

Experimental se poate observa că, prin introducerea unui metal în electrolit, metalul şi electroilitul se electrizează, apărând pe acestea sarcini electrice de semn contrar. Astfel metalul capătă în raport cu electrolitul un anumit potenţial care se numeşte *potenţial electrochimic*.

Calitativ, apariţia acestui potenţial se explică prin faptul că sarcinile negative ale moleculelor polare din solvent, aflate în vecinătatea atomilor metalului, resping electronii de valenţă ai acestor atomi, uşurând trecerea ionilor din metal în soluţie. Acest proces este analog procesului de solvataţie. Să examinăm fenomenul care are loc la contactul unui metal cu o soluţie slab concentrată de sare a aceluiaşi metal. Fie, de exemplu, o placă de Zn într-o soluţie apoasă de $ZnSO_4$. Ca urmare a acţiunii moleculelor polare de apă, la suprafaţa plăcii de Zn are loc o micşorare a lucrului de ieşire a ionilor de Zn^{++}, fapt care favorizează dizolvarea metalului. În condiţiile unei concentraţii suficient de slabe a ionilor de Zn în soluţie, placa de Zn dizolvându-se se încarcă negativ. Ionii pozitivi de zinc, treând în soluţie, lasă pe placă electronii lor de valenţă, în timp ce soluţia începe să se se încarce pozitiv. Se poate observa experimetal cum un electroscop, pus în contact cu placa metalică, se încarcă pozitiv (Fig. 6.6). La graniţa dintre metal şi solvent se formează un strat dublu de sarcini electrice de grosimea moleculei format din ioni si electroni.

Se înţelege că creşterea concentraţiei de ioni de Zn^{++} în vecinătatea plăcii şi totodată apariţia unei diferenţe de potenţial între placă şi solvent, provoacă o încetinire progresivă a procesului de dizolvare a plăcii de Zn. Procesul încetează odată cu stabilirea uui echilibru dinamic între metal şi solvent, în care curentul de ioni care trec din metal în solvent se compensează cu cel al ionilor care trec din solvent pe metal. Diferenţa de potenţial dintre metal şi solvent, în condiţiile echilibrului dinamic, este efectiv, *potenţialul electrochimic*.

În primă aproximaţie, potenţialul depinde numai de proprietăţile metalului şi de concentraţia ionilor săi în soluţie. Se poate alege un solvent cu o concentraţie de ioni pentru care potenţialul electrochimic corespunzător metalului să fie nul. În acest caz, la contactul electrolitului cu metalul, nu mai are loc topirea metalului deoarece concentraţia ionilor corespunde echilibrului dinamic.

Potenţialul electrochimic se formează şi la contactul metalului cu un solvent pur (apa); în acest caz metalul se încarcă mai negativ deât în cazul

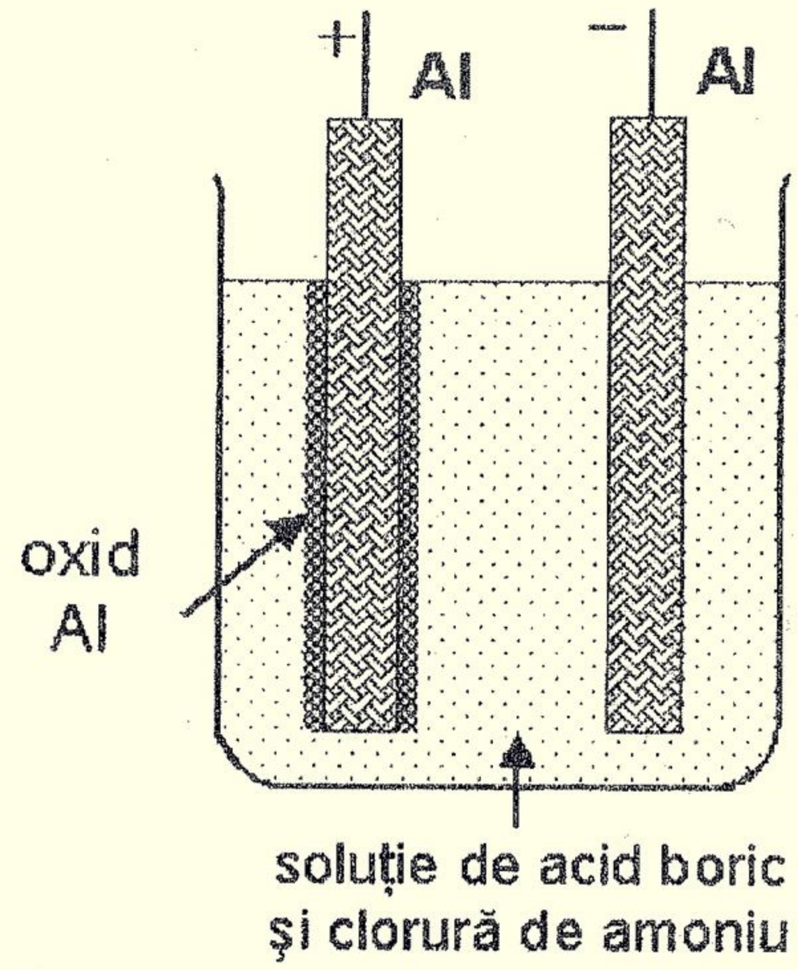


Figura 6.6: Experiment pentru evidenţierea potenţialului de electrod

contactului său cu electrolitul care conţine ioni din acel metal.

Dacă metalul este introdus într-un solvent cu concentraţie de ioni suficient de mare (soluţie suprasaturată), o parte dintre ionii din soluţie trece pe metal încărându-l pozitiv, iar electrolitul devine negativ.

Potrivit celor spuse până aici se poate presupune că, pentru un metal dat, prezenţa în soluţie a unor ioni diferiţi de cei ai metalului nu va trebui să influenţeze sensibil potenţialul electrochimic. De cxemplu, contactul zincului cu o soluţie de $ZnSO_4$ şi $ZnCl_2$ trebuie să genereze numai potenţialul zincului, numai dacă concentraţia ionilor de Zn^{++} în ambii solvenţi este aceeaşi. În realitate însă , experienţa arată că potenţialul electrochimic al unui metal dat nu depinde de natura anionilor electrolitului. Prezenţa simultană a ionilor altor metale sau a hidrogenului influenţează potenţialul electrodului dat. Explicaţia acestor efecte poate fi găsită în literatura de specialitate.

Ori ce ar fi, pentru aceeaşi concentraţie a ionilor metalului în electrolit, potenţialul electrochimic depinde numai de proprietăţile metalului. S-a convenit să se ia ca referinţă o soluţie care conţine un echivalent gram de ioni ai metalului; acessta se numeşte *soluţie cu concentraţie normală* În acest caz potenţialul electrochimic se numeşte *potenţial electrochimic absolut normal.*

Pentru măsurarea potenţialului electrochimic U este necesar să se conecteze conductorii de legătură a aparatului de măsură între metal şi lichid. Dar în

locul în care conductorul de legătură vine în contact cu solventul se formează un nou potenţial electrochimic U'; în acest mod aparatul va indica o valoare relativă $U - U'$ a potenţialului electrochimic. Efectiv, în aplicaţiile practice se măsoară valori relative ale potenţialului electrochimic pentru diferite metale şi nu valori absolute. Pentru măsurarea potenţialelor electrochimice relative s-a convenit să se utilizeze în calitate de al doilea electrod *electrodul normal de hidrogen*, acesta fiind constituit din platină, hidrogen saturat într-o soluţie cu concentraţie normală de ioni de hidrogen.

Potenţialul electrochimic al electrodului metalic, introdus în soluţia care conţine o sare a metalului cu concentraţie normală a ionilor, măsurat în raport cu potenţialul electrodului de hidrogen, se numeşte *potenţial electrochimic normal.*

În chimia fizică au fost elaborate metode de măsură a potenţialului electrochimic normal şi metode de determinare a potenţialului electrodului de hidrogen (relativ la electrolitul cu concentraţie normală de ioni de hidrogen), acesta fiind $U' = +0,274$ volţi. Cunosând potenţialul electrochimic normal U_n se poate determina potenţialul electrochimic absolut

$$U = U_n + 0,274\text{volţi}$$

Tabelul alăturat dă valorile absolute ale potenţialului electrochimic absolut normal U pentru diferite substanţe

Substanţa	Ionul	U (*volti*)	Substanţa	Ionul	U (*volti*)
Hidrogen	H^+	+0,274	Mercur	Hg^+	+1,13
Potasiu	K^+	-2,65	Plumb	Pb^{++}	+0,15
Sodiu	Na^+	-2,45	Cupru	Cu^{++}	+0,61
Zinc	Zn^{++}	-0,50	Argint	Ag^+	+1,07

6.11 Elemente galvanice.

Un element galvanic este constituit din doi electrozi din metale diferite aflaţi în contact cu electrolitul. Tensiunea electromotoare a elementului galvanic va corespunde diferenţei potenţialelor electrochimice ale electrozilor.

De exemplu în *elementul Daniel* (Fig. 6.7) unul dintre electrozi este constituit dintr-o placă de de zinc introdusă într-o soluţie de sulfat de

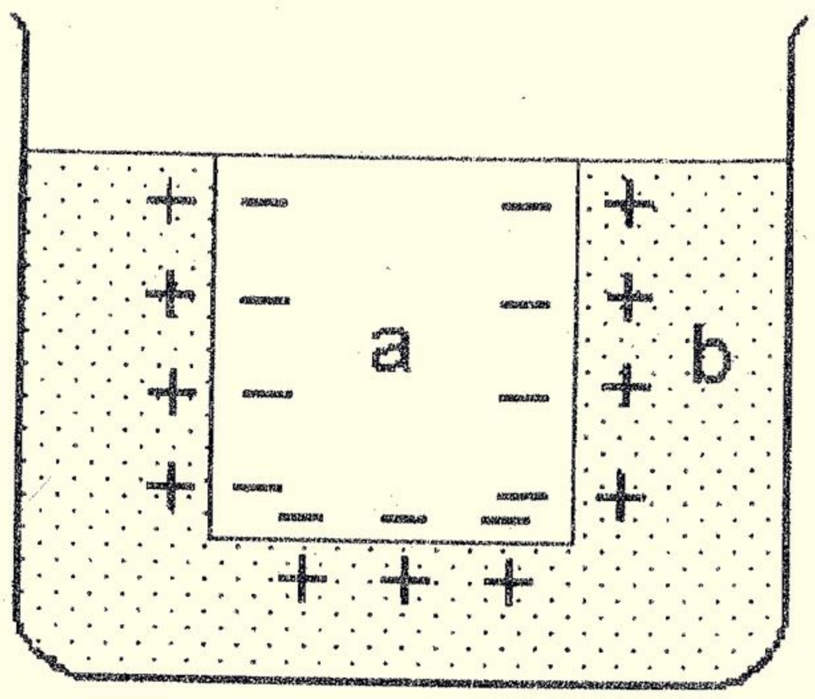


Figura 6.7: Elementul Daniel

zinc $ZnSO_4$ iar celălalt electrod de cupru este introdus într-o soluţie de sulfat de cupru.$CuSO_4$. Ambele soluţii sunt separate printr-un perete dintr-un material poros care nu împiedecă mişcarea ionilor dar împiedecă cele două soluţii să se amestece rapid. Presupunem că ambele soluţii au aceeaşi concentraţie. In acest caz potenţialul electrochimic absolut al cuprului este $U_{Cu} = +0,65$ volţi iar cel al electrodului de zinc este $U_{Zn} = -0,50$ volţi. Tensiunea electromotoare a acestui element este

$$E = U_{Cu} - U_{Zn} = 0,61 - (-0,50) = 1,11 volti \qquad (6.25)$$

Dacă unim polii elementului Daniel cu un conductor, această diferenţă de potenţial va determina trecerea electronilor de la placa de zinc la cea de cupru. Zincul va avea o sarcină negativă, dar mai mică decvât cea necesară pentru echilibru şi de aceea ionii de zinc încep să treacă mai intens în soluţie şi să se depărteze de zinc. În acelaşi timp curentul de electroni prin circuitul exterior către electrodul de cupru micşorează potenţialul cuprului provoând astfel o deplasare mai intensă a ionilor de cupru către electrodul pozitiv şi depunerea lor pe acest electrod. În consecinţă, acest proces spontan duce la o îmbogăţire continuă cu ioni de Zn^{++} a soluţiei din jurul electrodului de zinc, în timp ce soluţia din jurul electrodului de cupru sărăceşte în ioni de cupru îmbogăţindu-se în acelaşi timp cu ioni de SO_4^{--} încărcaţi negativ. Aceştia traversează peretele poros despărţitor, îndreptându-se către electrodul de zinc; întâlnind ionii de Zn^{++} formează o sare de $ZnSO_4$ care cade pe fundul vasului. Prin urmare în elemetul Daniel are loc o transformare a zincului în sulfat de zinc iar cuprul se depune pe electrodul pozitiv din soluţia de sulfat

de cupru:

$$Zn + CuSO_4 = Cu + ZnSO_4$$

Reacţiile chimice care au loc constau efectiv într-o reacţie de înlocuire a zincului cu cuprul în soluţia de sulfat de cupru.

Valoarea t.e.m. a elemetului Daniel poate fi calculată pe baza legilor de transformare a energiei. Din termodinamică se ştie că reacţia de înlocuire a zincului cu cuprul în soluţia de sulfat de cupru este exotermică. Eergia care se degajă este

$$\Delta W = 5.10^4 cal/mol \approx 2.10^5 jouli/mol$$

Pe seama acestei energii se efectuează lucrul $\Delta A = QE$ necesar pentru deplasarea sarcinii electrice Q sub efectul tensiunii electromotoare E a elementului Daniel. Egalitatea acestor energii, $\Delta W = \Delta A = QE$, permite să definim t.e.m a acestui element:

$$E = \frac{\Delta W}{Q} \tag{6.26}$$

Mărimea sarcinii transportate prin topirea unui mol de zinc se determină simplu: sarcina pozitivă a ionului de zinc este numeric egală cu dublul sarcinii electronului, $+2e$. De aceea prin dizolvarea unui mol de la electrodul de zinc, sarcina care trece prin soluţie este $Q = 2eN$ în care N este numărul lui Avogadro. Astfel,

$$E = \frac{\Delta W}{2eN} \tag{6.27}$$

Cu valorile numerice corespunzătoare obţinem:

$$E = \frac{2.10^5}{2.1,6.10^{-19}.6.10^{23}} = 1,04 volti,$$

valoare foarte apropiată de cea calculată mai sus cu datele din Tabel.

Un alt exemplu de element galvanic este elementul Volta, în care electrozii de zinc şi de cupru sunt introduşi într-o soluţie apoasă de acid sulfuric. Această soluţie nu mai conţine ioni de Cu^{++} şi de Zn^{++} dar, la contactul electrozilor de cupru şi de zinc cu soluţia apar straturi de grosimi moleculare care conţin aceşti ioni. Tensiunea electromotoare a elementului Volta, determinată de diferenţa potenţialelor electrochimice ale electrozilor, este de aproximativ 1,1 volţi.

BCU TIMIŞOARA

6.12 Polarizarea elementelor galvanice.

Ând se închide circuitul exterior al elementului Volta, ionii pozitivi de zinc încep să treacă de electrodul de zinc (catod) în soluţie, provoând deplasarea ionilor de hidrogen de la electrodul de zinc la cel de cupru. Aceştia formează o teacă de gaz în jurul electrodului de cupru (anod). Această acumulare de gaz atrenează două consecinţe: pe de o parte stratul de hidrogen măreşte rezistenţa interioră elemetului, iar pe de altă parte hidrogenul însuşi provocă un potenţial electrochimic suplimentar în sensul opus tensiunii electromotoare a elementului.

Acest fenomen se numeşte *polarizarea elementului*; potenţialul electrochimic suplimentar produs prin polarizare se numeşte *t.e.m de polarizare.* Datorită fenomenului de polarizare, curentul debitat în circuit se micşorează pe măsură ce durata de funcţionare creşte.

Pentru *depolarizarea elementelor* se aplică în general două metode: Una dintre acestea este cea aplicată în cazul elementului Daniel: Se folosesc două soluţii alese astfel inât să nu aibă loc formarea de noi substanţe la electrozi şi, totodată cele două soluţii să fie separate printr-un perete poros care să permită trecerea ionilor dar să împiedece amestecul soluţiilor.

A doua metodă constă în a acoperi electrodul pozitiv cu o substanţă puternic oxidantă (*depolarizant*) care, întrând în reacţie cu ionii de hidrogen, să formeze apa. Un astfel de procedeu de depolarizare este folosit frecvent în *elementul Leclanché.* În acest element electrodul negativ este constituit dintr-un cilindru de zinc iar electrodul pozitiv, situat axial, este un baston de cărbune învelit într-o teacă de bioxid de mangan (MnO_2) cu rolul de depolarizant. Electrolitul este o soluţie de clorură de amoniu (15% NH_4OH). T.e.m. a elementului Leclanché este de aproximativ 1,5 volţi.

6.13 Fenomenul de polarizare a electrozilor prin electroliză

Fenomenul de polarizare electrozilor are loc nu numai în elementele galva- nice ci şi în orice electroliză în care se separă substanţe diferite de materialul electrozilor.

De exemplu, o astfel de polarizare se observă în cazul electrolizei unei soluţii care conţine acid sulfuric diluat în apă. Când se trece un curent electric de la o sursă exterioară printr-un circuit format dintr-un vas cu doi

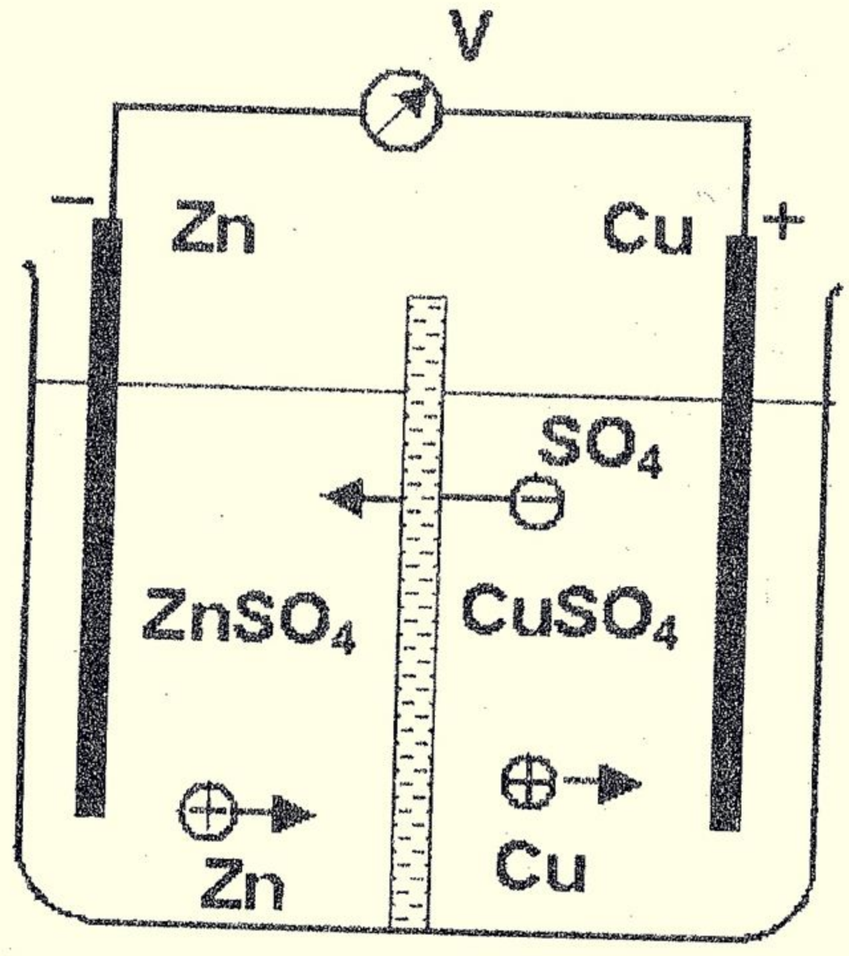


Figura 6.8: Experiment pentru demonstrarea polarizării electrozilor

electrozi identici de platină introduşi în soluţia de apă acidulată, în serie cu un comutator şi cu un instrument de măsură a curentului, (Fig.VII.9), are loc descompunerea apei. La anod se separă şi se acumulcază gaz de oxigen iar la catod se separă hidrogenul. Astfel are loc polarizareaelectrozilor care este însoţită de producerea t.e.m de polarizare.

Această tesiune electromotoare de polarizare E produsă prin electroliză este în sens opus tensiunii exterioare U, astfel înât curentul I prin electrolit depinde de tensiunea exterioară după legea lui Ohm,

$$I = \frac{U - E}{R} \tag{6.28}$$

în care R este rezistenţa electrică a vasului electrolitic.

T.e.m. de polarizare depide de materialul din care sunt confecţionaţi electrozii, de natura electrolitului şi de substanţele produse prin electroliză. În particular, t.e.m. de polarizare poate fi nulă. De exemplu, în cazul electrolizei unei soluţii de sulfat de cupru aflate într-un vas cu ambii electrozi de cupru, nu există polarizare a electrozilor deoarece în procesul electrolizei materialul electrozilor nu se modifică.

Separarea substaţelor în condiţiile polarizării electrozilor poate să aibă loc numai dacă tensiunea aplicată este mai mare deât o anumită tesiune de prag U_0, (tensiune de descompunere a electrolitului), eglă cu E. Această

tensiune de descompunere diferă de la o substanţă la alta.

Dacă în experimentul reprezentat în Fig. 6.8 se întrerupe curentul de la sursă, întrerupând contactul 0-1, ambii electrozi sunt acoperiţi cu gaz şi formează un element galvanic în care catodul va fi electrodul de hidrogen iar anodul, electrodul de oxigen. T.e.m a acestui element este egală cu 1,15 volţi. Dacă închidem apoi contactul 0-2, introduând astfel instrumentul de măsură în circuitul elementului, prin circuit va trece un curent al cărui sens este opus curentului care a provocat electroliza. Intensitatea acestui curent este,

$$I = \frac{E}{R} \tag{6.29}$$

în care R este rezistenţa circuitului închis. Când s-a consumat rezerva de gaz acumulat la electrozi, t.e.m devine din nou nulă şi curentul prin circuit încetează.

Astfel de elemente a căror t.e.m este produsă în prealabil printr-o electroliză, se numesc *elemente secundare* sau *acumulatori*

6.14 Acumulatorii electrici

Utilizaţi ca surse de curent, aceştia trebuie să satisfacă aumite condiţii: Să nu se descarce spontan în circuit deschis un timp îndelungat şi să poată fi reîncărcaţi repetat fără modificări ireversibile substanţiale. Două tipuri de acumulatori sunt mai răspândite: acumulatori acidici (sau cu plumb) şi acumulatori alcalini.

În acumulatorii acidici, electrozii sunt constituiţi din reţele de plumb umplute cu oxizi de plumb. În electrodul pozitiv celulele reţelei sunt umplute cu o pastă de minium de plumb (Pb_3O_4) iar electrodul negativ cu oxid de plumb (PbO). Electrozii sunt introduşi într-o soluţie de acid sulfuric cu concentraţia de 25-30 %, în care oxizii de plumb de pe electrozi se transformă în microcristale de sulfat de plumb $PbSO_4$. În mod obişnuit recipientul este format din material plastic.

La încărcare se trece un curent electric prin soluţie producând electroliza: La catod se separă din electrolit hidrogenul, sub acţiunea căruia se produc procese de regenerare cu formare de plumb pur (plăcile care formează electrodul negativ căpătând culoare gri); la anod se separă oxigenul care produce procesul de oxidare cu formare de bioxid de plumb

PbO_2 (plăcile electrodului pozitiv căpătâd culoarea maronie).

La descărcare curentul prin acumulator este dirijat de la catod spre anod şi reacţiile chimice decurg în ses invers. Cu toate că reacţiile chimice intermediare, în procesele de încărcare şi de descărcre a acumulatorilor cu plumb, nu sunt perfect cunoscutc, rezultatul final al acestor procese poate fi exprimat prin următoarea ecuaţie a reacţiilor finale:

La încărcare/descărcare $PbSO_4 + 2H_2O + PbSO_4 = PbO_2 + 2H_2SO_4 + Pb$

La încărcare, t.e.m. a acestor acumulatori, urcă până la 2,2 volţi, rămânând constantă mai mult timp iar apoi urcă rapid la 2,7 volţi. Sfârşitul încărcării se caracterizează printr-o degajare abundentă de gaz. La descărcare procesul decurge în sens invers: la început tensiunea se micşorează de la 2,7 la 2,2 volţi iar apoi rămâne costantă mai mult timp. La sfârşitul descărcării t.e.m începe să se micşorcze. În mod obişnuit t.e.m nu trebuic să coboare sub 1,85 volţi, deoarece, dacă se cotinuă descărcarea, microcristalele de sulfat de plumb se transformă în macrocristale provăând sulfatarea plăcilor, fapt care duce la deteriorarea acumulatorului. Cantitatea maximă de electricitate care poate fi acumulată la încărcare caracterizează capacitatea acumulatorului şi se măsoară în *amperi-oră* (Ah). Această capacitatc este proporţională cu cantitatea de bioxid de plumb separată la încărcarea acumulatorului. Pentru mărirea capacităţii electrozii acumulatorului sunt constituiţi din mai multe plăci conectate în paralel. Randamentul acumulatorilor atinge 80%

Dintre acumulatorii alcalini, cei mai răspândiţi sunt acumulatorii cu cadmiu şi nichel. Celulele electrodului pozitiv sunt încărcate cu hidroxid de nichel $Ni(OH)_2$ iar cele ale electrodului negativ cu hidroxizi de cadmiu şi de fier $Cd(OH)_2$, $Fe(OH)_2$. Electrozii sunt situaţi într-o cutie de fier la care se conectează electrodul pozitiv. La asamblare plăcilc negative se montează între cele pozitive. Electrolitul acumultorilor alcalini este o soluţie de KOH 20%. Schematic reacţiile chimice la încărcarea şi la descărcrea acumulatorilor cadmiu-nichel sunt reprezentate prin ecuaţiile:

La încărcare $\longrightarrow Fe(OH)_2 + 2Ni(OH)_2 = Fe + 2Ni(OH)_3 \longleftarrow$ La descărcare

La încărcare $\longrightarrow Cd(OH)_2 + 2Ni(OH)_2 = Cd + 2Ni(OH)_3 \longleftarrow$ La descărcare

La încărcarea acumulatorului masa activă a plăcilor pozitive se oxidează, $Ni(OH)_2$ trece în $Ni(OH)_3$ iar masa activă a plăcilor negative $Fe(OH)_2$ şi $Cd(OH)_2$ se regenerează şi se transformă în Fe şi Cd spongios. La descărcare toate procesele decurg în sens invers. La sfârşitul încărcării t.e.m acumulatorilor alcalini atinge 1,8 volţi, iar la descărcare acesta se micşo- rează foarte

repede până la 1,2-1,15 volţi. Descărcarea trebuie să înceteze la aproximativ 1 volt.

Acumulatorii fero-nichel se deosebesc prin construcţie foarte puţin de acumultorii cadmiu-nichel, având aproape aceleaşi caracteristici electrice. Deosebirea constă în faptul că masa activă a plăcilor negative ale acumulatorilor fero-nichel nu conţine cadmiu ci constă umai din fier activat electrochimic. Electrodul negativ este unit cu corpul acumultorului.

Acumulatorii fero-nichel, la temperturi coborâte, se comportă mult mai slab deât acumulatorii cadmiu-nichel. La temperaturi înalte are loc o autodescărcare pronunţată. Din aceste motive utilizarea acumulatorilor fero-nichel este limitată.

Acumulatorii alcalini prezintă o serie de avntaje faţă de acumultorii acidici: Greutate mai mică, rezistenţă la vibraţii mecanice, şi la scurtcircuit. Datorită acestor avantaje, în pofida faptului că au o t.e.m mai mică, o capacitate mai mică pe unitatea de masă, un randament mai slab, 60%, aceşti acumulatori sunt larg utilizaţi într-o serie de instalaţii fixe şi mobile.

6.15 Noi surse de curent

Actualmente sunt produse şi introduse în circulaţie o serie de noi surse chimice de curent cu destinaţii speciale; menţionăm câteva dintre acestea:

Acumulatori alcalini aur-argint. Plăcile pozitive ale acestor acumulatori sunt confecţionate din oxid de aur iar plăcile negative dintr-un ameste de oxid de zinc şi pulbere de zinc. Electrolitul este o soluţie de hidroxid de potasiu. T.e.m. este de ordinul 1,5 volţi. Aceşti acumulatori posedă o capacitate specifică remarcabilă, rezistenţă mecanică şi termostabilitate, permiţând obţinerea unor curenţi mari la dimensiuni relativ mici. Obişnuit sunt utilizaţi la pornirea motoarelor avioanelor şi la alimentarea staţiilor de radio-transmisiuni de pe avioane.

Elemente alcaline de mangan-zinc. Aceste elemente au t.e.m. 1,45 volţi, greutate specifică 1,3 kg la o capacitate specifică de 7 Ah şi sunt utilizate în mod frecvent pentru alimentarea instalaţiilor radiometrice în prospecţiunile geologice.

Capitolul 7

Recomandări bibliografice

Recomandăm in cele ce urmează un număr de cărţi din domeniul electricităţii şi magnetimului.

1. *Cursuri de electricitate si magnetism (in limba română)*

Feynman, R.P. (1970). Fizica modernă, vol. 2, Editura Tehnică, Bucureşti. (traducere în limba română)

Landau L.D., Lifşiţ, E.M. (1968). Electrodinamica mediilor continue, Editura Tehnică, Bucureşti. (traducere în limba română)

Maxwell, J.C. (1989). Tratat elementar de electricitate, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti. (traducere în limba română)

Mercheş, I., Radu, D. (2002). Electrodinamică, Editura Universităţii "Alcxandru Ioan Cuza" din Iaşi.

Mitoşeriu L., Ţura, V. (1998). Fizica mediilor polarizabile, Editura Universitatii "Alexandru Ioan Cuza", Iasi.

Mitoşeriu L., Ţura, V. (1999). Fizica dielectricilor, Editura Universitatii "Alexandru Ioan Cuza", Iasi.

Mitoşeriu L., Ţura, V. (2000). Electricitate şi magnetism, Editura Universitatii "Alexandru Ioan Cuza", Iasi.

Mândreci, A., Călţun, O., Spînu, L. (1999). Electricitate, magnetism şi elemente de electronică. Probleme comentate pentru studenţii Facultăţii de Chimie., Editura Universitatii "Alexandru Ioan Cuza", Iasi.

Mândreci, A., Călţun, O. (1999). Electromagnetism. Lucrări practice pentru studenţii Facultăţii de Chimie., Editura Universitatii "Alexandru Ioan Cuza", Iasi.

Novacu, V. (1966). Electrodinamica, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti.

Procopiu, S. (1939). Electricitate şi magnetism, vol. II, Editura Laboratorului de Electricitate Iaşi.

Procopiu, S. (1942). Electricitate şi magnetism, vol. I (ed. II-a), Editura Laboratorului de Electricitate Iaşi.

Păpuşoi, C. (1980). Proprictăţi magnetice ale corpului solid, vol. I, Universitatea Iaşi.

Păpuşoi, C. (1988). Proprietăţi magnetice ale corpului solid, vol. II, Universitatea Iaşi.

Păpuşoi, C., Stancu, A., Mitoşeriu, L. (1996). Electricitate şi magnetism - selecţie de lucrări de laborator, Editura BIT Iaşi.

Purcell, E.M. (1984). (Cursul de fizică Berkeley vol. II) Electricitate şi magnetism, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti. (traducere în limba română)

Tutovan, V. (1962). Introducere în măsurări electrice şi magnetice, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti.

Tutovan, V. (1984). Electricitate şi magnetism, vol. I, Editura Tehnică, Bucureşti.

Tutovan, V. (1985). Electricitate şi magnetism, vol. II, Editura Tehnică, Bucureşti.

Tutovan, V., Apostol, P., Mîndreci, A. (1975). Electricitate, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti.

Tutovan, V., Scutaru, V. (1989). Electricitatea la îndemîna experimentatorului, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti.

2. *Cursuri de electricitate si magnetism (in limbi străine)*

Baker, W., A. Haslam, et al. (1997). Electricity. Chicago, World Book in association with Two-Can.

Barnes, T. G. (1963). Foundations of electricity and magnetism. El Paso, Texas Western College Press.

Barnes, T. G. (1965). Foundations of electricity and magnetism. Boston, Heath.

Becker, R., F. Sauter, et al. (1964). Electromagnetic fields and interactions. New York, Blaisdell Pub. Co.

Bender, A. (1973). 41 science projects with electrons: beginning theory, generating your own electrons, electricity from heat and light. New York, Sentinel Books Publishers.

Benedek, G. B. and F. Villars (1973). Physics, with illustrative examples from medicine and biology. Reading, Mass., Addison-Wesley Pub. Co.

Benjamin, P. (1975). A history of electricity. New York, Arno Press.

Benumof, R. (1961). Concepts in electricity and magnetism. New York, Holt, Rinehart.

Binns, K. J. and P. J. Lawrenson (1963). Analysis and computaion of electric and magnetic field problems. Oxford, New York, Pergamon Press; [distributed in the Western Hemisphere by Macmillan.

Binns, K. J. and P. J. Lawrenson (1963). Analysis and computation of electric and magnetic field problems. New York, Macmillan.

Bleaney, B. I. and B. Bleaney (1965). Electricity and magnetism. Oxford, Clarendon Press.

Bleaney, B. I. and B. Bleaney (1976). Electricity and magnetism. London, Oxford University Press.

Bleaney, B. I. and B. Bleaney (1989). Electricity and magnetism. Oxford; New York, Oxford University Press.

Bolton, W. (1980). Basic electricity and magnetism. London; Boston, Butterworths.

Baurand, J. (1961). Mesures électriques, vol. I, Paris, Masson.

Baurand, J. (1962). Mesures électriques, vol. II, Paris, Masson.

Brelot, A. (1967). Électricité, magnétisme. Paris, Hermann.

Brelot, A. (1971). Électricité, magnétisme: travaux dirigés. Paris, Hermann.

Bruhat, G. (1963). Electricité, Paris, Masson.

Cash, T., B. Taylor, et al. (1989). Electricity and magnets. New York, N.Y., Warwick Press.

Chambers, L. G. (1973). An introduction to the mathematics of electricity and magnetism. London, Chapman and Hall.

Couchet, G., Durand, Ph., et al. (1969). Electricité générale, Paris, Masson.

Cottingham, W. N. and D. A. Greenwood (1991). Electricity and magnetism. Cambridge; New York, Cambridge University Press.

Crow, L. R. (1966). Learning electricity fundamentals. Indianapolis, H. W. Sams.

Davidson, D. A. (1997). Shape power: the fundamental discovery of how shape modifies undifferentiated universal aether into electricity, magnetism, and nuclear forces. Sierra Vista, Ariz., Rivas Pub.

Dévoré, G., Annequin, R. (1966). Cours de Physique, Electricité I et II, Paris, Librairie Vuibert.

Dobbs, R. (1984). Electricity and magnetism. London; Boston, Routledge and K. Paul.

Duckworth, H. E. (1960). Electricity and magnetism. New York, Holt.

Duffin, W. J. (1965). Electricity and magnetism. London, New York, McGraw-Hill.

Duffin, W. J. (1968). Advanced electricity and magnetism for undergraduates. London, New York [etc.], McGraw-Hill.

Duffin, W. J. (1973). Electricity and magnetism. New York, Wiley.

Dunsheath, P. (1960). Electricity: how it works. New York, Crowell.

Durand, E. (1964). Electrostatique, vol. I, Paris, Masson.

Durand, E. (1966). Electrostatique, vol. II, Paris, Masson.

Edmonds, D. T. (2001). Electricity and magnetism in biological systems. Oxford [England]; New York, Oxford University Press.

Faraday, M. (1993). The forces of matter. Buffalo, N.Y., Prometheus Books.

Feravolo, R. V. and M. Besunder (1968). More easy physics projects; magnetism, electricity, sound. Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall.

Fisher, S. H. (1972). Table top science; physics experiments for everyone. Garden City, N.Y., Published for the American Museum of Natural History [by] Natural History Press.

Frühling, A. (1966). Cours d'électricité, Paris, Dunod.

Gardner, R. and D. Ettlinger (1994). Electricity and magnetism. New York, Twenty-First Century Books.

Gordon, M. and M. Gordon (1996). Electricity and magnetism. New York, Thomson Learning.

Graf, R. F. (1973). Safe and simple electrical experiments. New York, Dover Publications.

Gray, A. (1967). Absolute measurements in electricity and magnetism. New York, Dover Publications.

Gray, R. L. (1974). Physics problems: electricity, magnetism, and optics. New York, Wiley.

Grolier Educational (Firm) (2002). Science activities. Danbury, CT, Grolier Educational.

Halacy, D. S. (1966). Radiation, magnetism, and living things. New York, Holiday House.

Ham, J. M. and G. R. Slemon (1961). Scientific basis of electrical engineering. New York, Wiley.

Hazen, R. M. and Teaching Company. (2001). The joy of science. Chantilly, VA, The Teaching Co.

Heddle, T. (1971). Calculations in fundamental physics. Oxford, New York, Pergamon Press.

Henbest, N., H. Couper, et al. (1983). Physics. New York, Watts.

Jackson, J.D. (1980). Classical Electrodynamics, Wiley, New York.

Jacobowitz, H. (1963). Electricity and magnetism pocket crammer. New York, Ken Pub. Co.

Jefimenko, O. D. (1966). Electricity and magnetism; an introduction to the theory of electric and magnetic fields. New York, Appleton-Century-Crofts.

Jennings, T. J. and N. Burgin (1989). Electricity and magnetism. Chicago, Childrens Press.

Joseph, A. and D. J. Leahy (1965). Programmed physics. New York, Wiley.

Kauppinen, O. (1987). Investigation of superconducting pulse magnets for energy storage: final report. Tampere, Tampere University of Technology, Lab. of Electricity and Magnetism.

Keighley, H. J. P. and F. R. McKim (1969). The physical world; an O-level course. Oxford, New York, Pergamon Press.

Kerrod, R. and P. Bull (1987). Moving things. Morristown, N.J., Silver Burdett Press.

Kerrod, R. and T. Evans (1994). Electricity and magnetism. New York, Marshall Cavendish.

Kip, A. F. (1962). Fundamentals of electricity and magnetism. New York, McGraw-Hill.

Kip, A. F. (1968). Fundamentals of electricity and magnetism. New York, McGraw-Hill.

Kittel, C. (1965). Berkeley physics course. New York, McGraw-Hill.

Knapp, B. J., D. Woodroffe, et al. (2002). Visual science encyclopedia. Danbury, CT, Grolier Educational.

Kurrelmeyer, B. and W. H. Mais (1967). Electricity and magnetism. Princeton, N.J., Van Nostrand.

Lafferty, P. (1989). Electricity and magnetism. New York, Cavendish.

Lafferty, P. and G. Fryer (1995). New science library. Chicago, IL, J.G. Ferguson Pub.

Laing, E. W. and W. McFarlane (1972). Solving problems in dynamics, electricity and magnetism. Edinburgh, Oliver and Boyd.

Liebler, D. C. (1960). Study-skills in magnetism and electricity. New York, Ungar.

Marks, P. (2002). Electricity and electronics. Oxford; New York, Oxford University Press.

Math, I. and H. Keith (1988). More wires and watts: understanding and using electricity. New York, Scribner.

Matveev, A.M. (1986). Electricity and Magnetism , Mir Publishers, Moscow.

Maxwell, J. C. (1998). A treatise on electricity and magnetism. Oxford, New York, Clarendon Press; Oxford University Press.

McGinnis, E. A. and International Correspondence Schools. (1969). Electricity and magnetism. Scranton, International Correspondence Schools.

McKenzie, A. E. E., J. Jenkins, et al. (1973). A second course of electricity. London, Cambridge University Press.

Meiani, A. (2003). Magnetism. Minneapolis, MN, Lerner Publications Co.

Meiners, H. F. and American Association of Physics Teachers. (1985). Physics demonstration experiments. Malabar, Fla., R.E. Krieger Pub. Co.

Mottelay, P. F. (1975). Bibliographical history of electricity and magnetism. New York, Arno Press.

Neittaanmäki, P., M. Rudnicki, et al. (1996). Inverse problems and optimal design in electricity and magnetism. Oxford [England]; New York

Nelkon, M. (1966). Advanced level magnetism and electricity. London, Edward Arnold.

Open University. Technology Foundation Course Team. (1972). Electricity and magnetism. [Bletchley, Open University Press.

Page, L. and N. I. Adams (1969). Principles of electricity; an intermediate text in electricity and magnetism. Princeton, N.J., Van Nostrand.

Panofsky, W. K. H. and M. Phillips (1962). Classical electricity and magnetism. Reading, Mass., Addison-Wesley Pub. Co.

Panofsky, W. K. H. and M. Phillips (2005). Classical electricity and magnetism. Mineola, N.Y., Dover Publications.

Parker, P. (1960). Electricity and magnetism. London, Heinemann.

Parker, S. (2000). Electricity and magnetism. Austin, TX, Raintree Steck-Vaughn.

Parsons, A. and J. Barnes (1995). Electricity. New York, Thomson Learning.

Pugh, E. M. and E. W. Pugh (1960). Principles of electricity and magnetism. Reading, Mass., Addison-Wesley Pub. Co.

Pugh, E. M. and E. W. Pugh (1970). Principles of electricity and magnetism. Reading, Mass., Addison-Wesley Pub. Co.

Rachinger, W. A. (1973). Electricity and magnetism; diagnostic tests. Sydney, New York, John Wiley and Sons Australasia.

Raychaudhuri, A. K. (1990). Classical theory of electricity and magnetism: a course of lectures. Calcutta; New York, Oxford University Press.

Rayner, G. H., A. E. Drake, et al. (1970). S.I. units in electricity and magnetism. London, H.M.S.O.

Recknagel, A. (1967). Physik. Würzburg, Physica-Verlag.

Reichenbach, K. (1974). Researches on magnetism, electricity, heat, light, crystallization, and chemical attraction in their relations to the vital force. Seacaucus, N.J., University Books.

Reimann, A. L. (1971). Physics. New York, Barnes and Noble.

Reuben, G. H. and B. Case (1968). Electricity experiments for children. New York, Dover Publications.

Rouault, M. (1965). Electricité, vol. 2, Paris, Masson.

Rumeau, G., Guinier, G. (1965). Cours d'électricité, Paris, Librairie Delagrave.

Russell, A. W. (1966). The m.k.s. approach to electricity and magnetism. London, University of London P.

Scott, W. T. (1966). The physics of electricity and magnetism. New York, Wiley.

Scott, W. T. (1977). The physics of electricity and magnetism. Huntington, N.Y., R. E. Krieger Pub. Co.

Sear, W. (1972). The new world of electronic music; a practical book that gives the basic principles of sound, acoustics, electricity, magnetism, recording techniques necessary to understand the concepts and functions of the synthesizer. [New York], Alfred Pub. Co.

Searle, B. (2002). Electricity and magnetism. Brookfield, Conn., Copper Beech Books.

Sears, F. W. (1973). Electricity and magnetism. Reading, Mass., Addison-Wesley.

Sears, F. W. and M. W. Zemansky (1960). College physics. Reading, Mass., Addison-Wesley Pub. Co.

Seeman, B. and J. E. Barry (1967). The story of electricity and magnetism. Irvington-on-Hudson, N.Y., Harvey House.

Semat, H. and R. H. Blumenthal (1967). College physics; a programmed aid. New York, Holt.

Setford, S. (2004). Science facts. New York, Dorling Kindersley Pub.

Shields, J. P. (1970). Novel experiments with electricity. Indianapolis, H. W. Sams.

Shire, E. S. (1960). Classical electricity and magnetism. Cambridge [Eng.], University Press.

Sootin, H. (1962). Experiments in magnetism and electricity. New York, F. Watts.

Sootin, H., H. Sootin, et al. (1968). Experiments with magnetism. New York, Norton.

Stone, A. H., B. M. Siegel, et al. (1970). Turned on: a look at electricity. Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall.

Storey, C. R. (1999). Electricity, magnetism, gravity and the big bang. Parsons, W. Va., McClain Print. Co.

Strelkov, S. P. and V. L. Ginzburg (1965). Problems in undergraduate physics. Oxford, New York, Pergamon Press.

Sugiura, M. and T. Nagata (1966). The second Benedum Symposium on Earth Magnetism. Tokyo, Society of Terrestrial Magnetism and Electricity.

Tavel, M. (1970). Electricity and magnetism. New York, Barnes and Noble.

Taylor, B. (1991). Batteries and magnets. New York, Warwick Press.

Taylor, B. (1992). More power to you! the science of batteries and magnets. New York, Random House.

Taylor, H. and S. Sweet (1998). A lightning bolt is hotter than the sun and other facts about electricity. Brookfield, Conn, Copper Beech Books.

Thompson, S. P. (2003). Hand list of the magnetic and electrical books in the library of Silvanus Phillips Thompson. Mansfield Centre, CT, Martino Pub.

Thomson, J. J. and J. C. Maxwell (1968). Notes on recent researches in electricity and magnetism, intended as a sequel to Professor Clerk-Maxwell's 'Treatise on Electricity and Magnetism'. London, Dawsons.

Tipler, P. A. and G. Mosca (2004). Physics for scientists and engineers. New York, W.H. Freeman.

Tocci, S. (2000). Science fair success in the hardware store. Berkeley Heights, NJ, Enslow Publishers.

Tralli, N. (1963). Classical electromagnetic theory. New York, McGraw-Hill.

Trevena, D. H. (1961). Static fields in electricity and magnetism. London, Butterworths.

Turnbull, K. D. (1977). The alignment pattern: a new basic theory of electricity and magnetism. Ilfracombe, Stockwell.

Van Riper, A. B. (2002). Science in popular culture: a reference guide. Westport, CT, Greenwood Press.

Vasudeva, D. N. (1966). Fundamentals of magnetism and electricity for B.Sc. and engineering students. Delhi, S. Chand.

Vogt, G. (1985). Electricity and magnetism. New York, F. Watts.

Ward, A. (1992). Magnets and electricity. New York, F. Watts.

Warring, R. H. (1963). Instructions in electricity and magnetism. London, Museum Press.

Whalley, M. (1994). Experiment with magnets and electricity. Minneapolis, Minn., Lerner Publications Co.

Wheatland, D. P. (1970). Electricity and magnetism before 1820, and other scientific books: short-title list of a collection formed by David P. Wheatland. Topsfield, Mass., D.P. Wheatland.

Whyman, K. (1986). Electricity and magnetism. New York, Gloucester Press.

Whyman, K. (2004). Electricity and magnetism. North Mankato, Minn., Stargazer Books.

Winch, R. P. (1963). Electricity and magnetism. Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall.

Wood, R. W., S. Hoeft, et al. (1996). Electricity and magnetism FUNdamentals. New York, Learning Triangle Press.

Yarwood, J. and J. H. Fewkes (1973). Electricity and magnetism. London, University Tutorial Press.

Young, L. (1969). Systems of units in electricity and magnetism. Edinburgh, Oliver and Boyd.

Index

şunt, 228

câmp contraclectromotor, 252
câmpul efectiv Lorentz, 162
câmpul electric molecular, 167
capacitatea condensatorului, 111
capacitatea electrică, 102
coeficienţi de capacitate, 105
coeficienţi de potenţial, 108
condensator cilindric, 117
condensator cu dielectric, 140
condensator electric, 108
condensatorul plan, 13, 114
condensatorul sferic, 120
condiţii la limită, 148
conductanţă, 224
conductor în echilibru electrostatic, 78
Coulomb, Charles Augustin, 9
curba lui Langevin, 170
curent electric permanent, 212

densitate de curent, 212
dielectric anizotrop, 173
dipolul electric punctiform, 50
distribuţie cilindrică de sarcină, 61
distribuţie liniară de sarcină, 23, 63, 65
distribuţie sferică de sarcină, 55
distribuţie superficială de sarcină, 22, 67, 69
distribuţie volumică de sarcină, 21

ecran electric, 98
ecuaţia Laplace, 49, 151
ecuaţia Poisson, 48
efect Joule, 245
electreţi, 172
electroforul, 100
electroliza, 287
electrometre, 203
electrometre relative, 205
electrometru, 203
electrometru cu patru cadrane, 207
electrometrul absolut Kelvin, 204
electrostricţiune, 179
elemente corespondente, 90
energia condensatorului, 198
energia dipolului, 202
energia electrostatică de interacţiune, 190
energia unui sistem de conductori, 195
energie electrostatică, 186
experienţa lui Kamerlingh Onnes, 233

feroelectrici, 172
formula Clausius-Mosotti, 155
funcţia lui Langevin, 162

GMR, 237

gruparea condensatorilor, 121
gruparea rezistorilor, 226

inducţie electrică, 142
inel de gardă, 116
influenţa totală, 93
intensitatea curentului electric, 213

legea lui Coulomb, 10, 12
legea lui Curie-Weiss, 171
legea lui Ohm, 218, 248
legea lui Ostwald, 284
legile lui Faraday, 288
legile lui Kirchhoff, 257
linii de camp electric, 33

magnetorezistenţă, 230
magnetorezistenţa, 237
mediu dielectric, 132
metoda imaginilor, 93
mho, 224
molecule polare, 157

ohm, 224

permeanţa electrică, 113
permitivitate relativă, 141
permitivitatea, 175
piroelectricitate, 180
polarizaţia de saturaţie, 165
polarizaţie spontană, 165
polarizaţie volumică, 137
polarizarea dielectricului, 134
potenţial electric, 28
potenţialul electric, 31
presiune electrostatică, 84
punct Curie, 164
puntea lui Wheatstone, 271

reluctanţa electrică, 112, 165
rezistivitate, 221
Rigiditatea dielectrică, 175

sarcină de polarizare, 144
sare de Seignette, 166
sistemul de unităţi C.G.S., 11
sistemul de unităţi C.G.S. electrostatic, 11
steradian, 18
supraconductibilitate, 229
suprafeţe echipotenţiale, 34
susceptivitate electrică, 140, 141

temperatură Curie, 164
temperatura Curie, 170
tensiune de pas, 274
teorema circulaţiei vectorului câmp electric, 39
teorema lui Coulomb, 81, 82
teorema lui Gauss, 20, 23, 39, 43
teorema lui Norton, 264
teorema lui Stokes, 45
teorema lui Thévenin, 263
teorema transferului maxim de putere, 267
transformări la potenţial constant, 200
transformări la sarcină constantă, 200
transformarea triunghi-stea, 269
triboelectricitate, 180

unghiul de pierderi, 176
unghiul solid, 18

vector deplasare electrică, 142
vectorul câmp electric, 14
volt, 31